Réflexion sur l’enseignement des mathématiques au cycle 3 (école collège) à partir de l’exemple des nombres décimaux.
Obstacles et choix didactiques.

Paris le 21 novembre 2018.

Joël Briand

ddm.joel.briand.free.fr

Operation.maths.free.fr

Equipe
Opération
Euromaths.

Pour des raisons de compréhension, ce document est uniquement destiné à celles et ceux ayant assisté à l'exposé.

Plan

Partie 1

- 1-1 Comparer des situations : buts des mathématiques
- 1-2 Les programmes 2016
- 1-3 Les jeunes professeurs, les manuels scolaires
- 1-4 Questions autour des décimaux
- 1-5 Les obstacles
- 1-6 Les fractions du CM1 à la 6°.
- 1-7 La droite numérique : point aveugle dans l'enseignement.

Partie 2

- Une progression à l'école : étude détaillée.

Partie 1

1-1
En guise d'introduction

Aborder un savoir nouveau

L'introduction de la somme de deux décimaux

Antécédents :

Les écritures à virgule ont été introduites à partir des fractions décimales

5 scénarios…

- *Scénario 1 :* Le professeur commente chiffre par chiffre, au tableau, la technique pour calculer 1,45 + 2,7. Les élèves répètent le procédé vu dans les nombres entiers et apprennent à mettre la virgule à l'endroit adapté.

- *Scénario 2 :* Le professeur explique la technique en s'appuyant sur les savoirs des fractions. Il fait ensuit le lien entre savoirs faire anciens et nouveaux (addition en colonne).

- *Scénario 3 :* Lecture d'un énoncé écrit au tableau *: « Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m. Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ? ».* Travail individuel ou par groupes. Ecriture des démarches sur une grande feuille qui sera affichée éventuellement au tableau. Synthèse collective.

- *Scénario 4* : Par groupe : deux baguettes de longueurs connues et affichées : 1,45m et 2,7m. Consigne : « Je vous demande de trouver la longueur de la baguette obtenue en mettant ces deux baguettes bout à bout ». Les élèves disposent de mètres. Ils mesurent et trouvent la longueur totale. Synthèse collective.

- *Scénario 5 :* Dans la classe, deux baguettes de longueurs connues et affichées: 1,45m et 2,7m. Consigne : « Prévoyez par le calcul la longueur de la baguette obtenue lorsque l'on mettra ces deux bout à bout ».

Ce qui caractérise ces situations

	Situation 1	Situation 2	Situation 3	Situation 4	Situation 5
Problème posé	non	non	Oui (à partir d'un énoncé)	Oui (à partir d'un matériel)	Oui (à partir d'un matériel)
Action de l'élève	imiter	imiter	Trouver un résultat puis repérer les erreurs lors de la correction.	Mesurer. Aucune anticipation.	Trouver un résultat puis repérer les erreurs par expérimentation manipulation.
Transfert de responsabilité	non	non (ou maïeutique)	Oui	oui (mesurer)	Oui (prévoir puis vérifier en mesurant)
Nature de la tâche	Technique : l'addition en colonne	Technique : addition des fractions puis addition en colonne Technologie : validation mathématique	Technique : addition des fractions puis addition en colonne Technologie : validation mathématique	Technologie : Mesurage de bandes mises bout à bout.	Technique : addition prolongement de l'addition des entiers ou addition des fractions puis addition en colonne. Technologie : validation par expérimentation ou/et mathématique.

En situation 5, que peuvent faire les élèves ?

- agir avec leurs “connaissances de base”
- Constater si leurs prévisions sont justes ou fausses (validation pragmatique, confrontation à la réalité)
- Chercher l’origine de l’erreur (retroaction du milieu)
- Chercher une explication mathématique, (sans doute aidé par le professeur) (validation théorique).

Pour le professeur, il ne s’agit pas d’une simple posture pédagogique.

En situation 5, quel est le rôle du professeur?

- Il a construit une situation qui permet une expérimentation par les élèves et qui provoque une rétro-action favorable du milieu.

- Il fait évoluer la tâche des élèves: expérimenter sur les nombres, vérifier, développer, valider

- Il propose d'autres calculs (entraînement)

5,6 + 2,37 16,35 + 2,706 …….

Petite remarque :

Longueurs des bandes : 1,45 m et 2,7 m.

Réponses envisageables dans les scénarii 3, 4 et 5 ?

3,52	**(1 + 2 = 3 et 45 + 7 = 52)**
3,115	**(2 + 1 = 3 et 45 + 70 = 115)**
1,72	**(145 + 27 = 172 puis 1,72)**
4,15	

Ce qui est à comparer

- Les rôles respectifs du professeur et des élèves

- Le rôle de la manipulation

- La prise en compte des conceptions initiales

- La distinction entre :

    - ➢ Quelle est la « bonne » réponse?

    - ➢ Pourquoi cette réponse est « la bonne »?

En 6°….le moment de vérification

Alors, qu'est-ce que faire des mathématiques ?

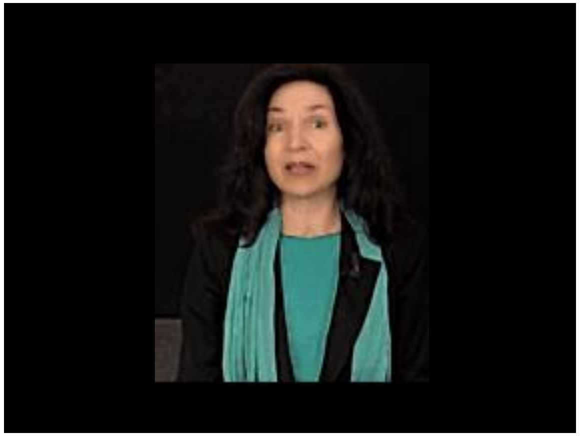
- Mathématiser c'est construire un modèle (produit par un langage : i.e. « moyen d'objectiver et de développer la pensée. ») en vue d'exercer un contrôle sur un milieu (souvent matériel en début de scolarité).
- **Le milieu matériel permet de donner du sens à la tâche à accomplir qui est de modéliser et prévoir. Il joue son rôle lors de phases de vérification.**
- La manipulation est donc un terme à prendre avec précautions : quelle est sa place ? son rôle ? Comprendre le jeu, prévoir puis vérifier..
- **On est loin de la vieille lune : «** phase concrète, phase imagée, phase abstraite »

Les « rétronovateurs »

- L'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, pour des raisons diverses, s'est de moins en moins appuyé sur des manipulations d'objets.
- **Or, un milieu matériel permet de donner du sens à la tâche à accomplir qui est de modéliser et prévoir. Il joue aussi son rôle lors de phases de vérification.**
- **Cette présence d'un milieu matériel ne doit pas réduire l'activité à de la manipulation. (Philippe Meirieu parle de la « sacralisation du bricolage »)**

Le merchandising actuel :
« méthode(s) de Singapour », profite de ce « vide » à propos des manipulations pour laisser croire à des découvertes récentes.

.



Face aux rétronovateurs, rester professionnels, exiger une formation solide

- Ne pas devenir des exécutants à qui on imposerait des procédures de plus en plus standardisées.

- Ne pas externaliser systématiquement les démarches d'aides aux élèves en difficulté : l'hétérogénéité est un fait.

- Rester vigilants à l'égard de pratiques « miroirs aux alouettes » s'inscrivant dans *« une veine pseudo-scientifique très en vogue actuellement, qui nous enjoint au « plaisir » et à l'«épanouissement » en combinant aléatoirement ergonomie, neurosciences, métaphysique, sagesse orientale ou encore économie et management. » LAURENCE DE COCK 27 MAI 2017 Médiapart.*

Garder la mémoire

Fractions en 6° en 2017 (une classe représentative)

1) Sur une bande papier d'une unité de longueur, placer le nombre $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ à l'aide de pliages.

2) Compléter : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4} =$.

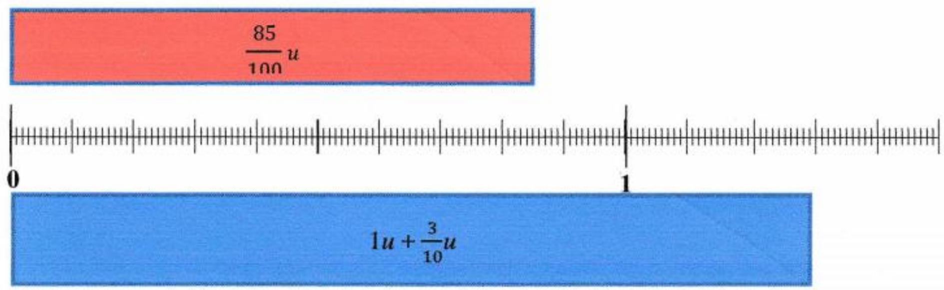
	R2	E2	NR2
R1	11	7	2
E1	0	5	0
NR1	0	3	1

En 6°, les professeurs se posent les mêmes questions
cf : APMEP Nantes octobre 2017
Atelier animé par S. Roubin et B. Rozanes (IREM de LYON)

BANDES ACCOLEES[1]

DESCRIPTION RAPIDE : On dispose de deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures....

MATERIEL :



- Une demi-droite graduée en centièmes
- Deux bandes respectivement de longueur $1u + \frac{3}{10}u$ et $\frac{85}{100}u$ à projeter ou à construire en grand pour pouvoir être affichées au tableau.

CONSIGNES

1. Vous rangez les bandes et les droites graduées dans une enveloppe. Vous devez prévoir combien mesurerait une bande ayant la même longueur que vos deux bandes mises bout à bout. On les sortira ensuite pour vérifier.

2. Vous devez maintenant essayer de poser l'addition de 1u + 3/10 u et de 85/100 u. (Cela doit vous permettre de retrouver le résultat précédent.) Vous travaillerez d'abord seuls puis vous vous mettrez d'accord à plusieurs sur une disposition qui vous semble pratique.

En fait

- De moins en moins d'enseignants pensent nécessaire de construire, à des moments cruciaux des apprentissages, des situations de classe que le fichier viendrait compléter, consolider.
- Et même dans ce cas, l'illustration, la manipulation mal comprises ne rendent pas non plus de fiers services aux apprentissages.

Proposer des situations d’apprentissage par adaptation

Il s’agit de construire des dispositifs adaptés à l’âge, aux connaissances, et aux intérêts des élèves concernés et qui abordent plusieurs types d’enjeux :

-Enjeux de savoirs : Construire des milieux à enjeux dans lesquels le savoir visé est la solution optimale au problème posé. Les enfants y progressent. Ils peuvent se rendre compte par eux-mêmes de leurs erreurs.

Or : « plus les élèves sont en difficulté plus on les plonge dans du déjà fait, du déjà vu, de l’entraînement. » rapport sur l’individualisation (CNESCO sep 2016) :http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2016/09/160926-Inegalites-scolaires.pdf

-Enjeux langagiers : la production de signes permet de concevoir un monde, de décontextualiser, de dépersonnaliser. (cf : la secondarisation).
-Enjeux sociaux : à un moment donné, l’élève aura à écouter, à lire l’autre.
-Enjeux éthiques : engagés dans une telle situation, les élèves cherchent à savoir, à comprendre et accepter l’action d’autres élèves.

(vu avec Viviane Bouysse).

Caractéristiques de ces situations

• Y a-t-il bien un problème posé aux élèves ou ont-ils seulement à appliquer une consigne?

• L'utilisation de la connaissance est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves?

• L‘élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée?

• Comment voit-il qu'il a réussi ou échoué? (Est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions interprétables par l'élève?)

• La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir?

• L'organisation de la situation permet-elle :

- À chaque enfant d'être confronté au problème et de faire des tentatives ?
- L'échange et la confrontation des points de vue ?

Pourquoi cette approche reste difficile à faire partager ?

- Le système,
  - Les programmes 2008 ont mis en évidence des tensions, sources d'obstacles à des réformes pourtant possibles : *(charges inutilement lourdes : produit de 2 décimaux en CM2).*
  - Les repères de progressivité actuels, en dehors de leurs errements étaient ils nécessaires pour étayer les programmes de 2016 ?

Exemples d’incohérences actuelles

Les repères de progressivité qui ne respectent pas les programmes et qui sont en incohérence avec eux-mêmes : un exemple :

calculer l’aire d’un triangle quelconque lorsque les données sont exprimées avec des nombres entiers.

Après avoir consolidé le produit de décimaux, ils utilisent les formules pour calculer l’aire d’un triangle quelconque et celle d’un disque.

CM pour calculer des périmètres simples ou complexes.

Ils apprennent la formule de la longueur d’un cercle et l’utilisent après consolidation du produit d’un entier par un décimal, dans un premier temps, puis du produit de deux décimaux.

la nature des nombres en jeu, leur taille ou leur nombre.

- Il vérifie la vraisemblance d’un résultat, notamment en estimant un ordre de grandeur.

Calcul posé

- Les élèves apprennent les algorithmes :
  – de l’addition et de la soustraction de deux nombres décimaux ;
  – de la multiplication d’un nombre décimal par un nombre entier ;
  – de la division euclidienne de deux nombres entiers (quotient décimal ou non. Par exemple, 10 : 4 ou 10 : 3) ;
  – de la division d’un nombre décimal par un nombre entier.

Seuls les programmes ont force de loi.

Pourquoi cette approche reste difficile à faire partager ? (suite)

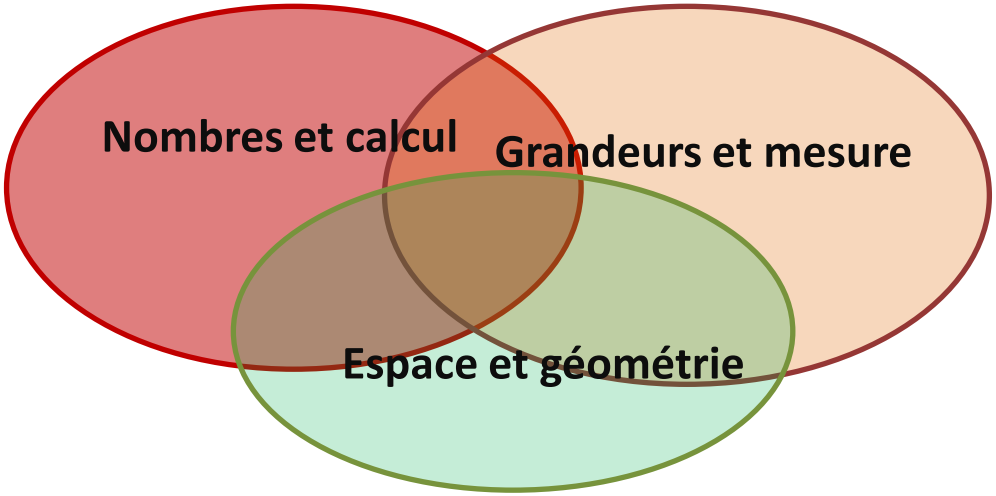
- Le professeur :
  - Peu d'outils pour mettre en scène des situations d'apprentissage par adaptation au sein d'une progression
  - L'idée que ce type d'approche serait réservé à une élite; Se dégager de la « pédagogie spontanée » qui consiste à préconiser les tâches de manipulation (de type 1) pour les élèves étiquetés en difficulté, et à enseigner des procédés.
  - L'idée de ne pas ennuyer les élèves donc de faire un peu de tout chaque jour, donc de renoncer à une « ouverture de chantier »
  - Difficulté personnelles liées aux mathématiques à enseigner *(l'exemple de la soustraction)*

1-2 les programmes 2016 de l'école primaire

Programmes 2016
6 Compétences travaillées

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer.

Trois domaines imbriqués



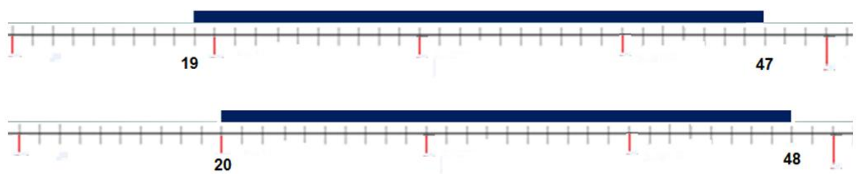
Rappel : s'appuyer sur des algorithmes évolutifs en cycle 2.

Addition

```
   3 7
+
   2 5
  ----
   1 2
 + 5 0
  ----
   6 2
```

```
   1
   3 7
+  2 5
  ----
   6 2
```

Soustraction



47 c'est	48
-	-
19	20

```
  4 10+7
-
1+1  9
```

Multiplication

	20	5	
	200	50	10
	60	15	3

```
    15
+   60
+   50
+  200
  ----
   325
```

puis, plus tard

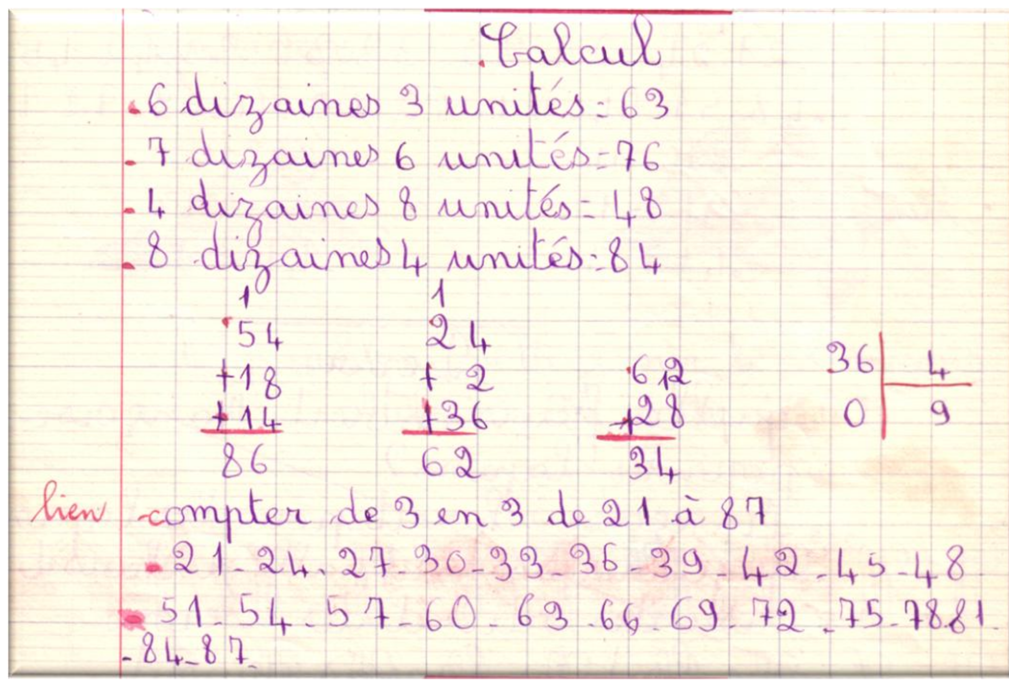
```
     25
x    13
  -----
     15
+    60
+    50
+   200
  -----
    325
```

puis

```
     25
x    13
  -----
     75
    25
  -----
    325
```

L’exemple de la division

- Au CP : partages équitables simples.
- Enseigner la division au CE1 (nombres inférieurs à 100) consiste avant tout à proposer des situations fondées sur des partages équitables de collections et sur des multiplications à trous simples. (2 et 5).
- Attention aux effets d’annonce…



Au CM1.

Un éleveur de volailles veut expédier des œufs par boîtes de 24. Il a 439 œufs. Combien de boîtes doit-il prévoir ?

- **Au début**, **contrôle expérimental :** des prévisions obtenues (par calcul réfléchi) à l'aide d'un milieu matériel.

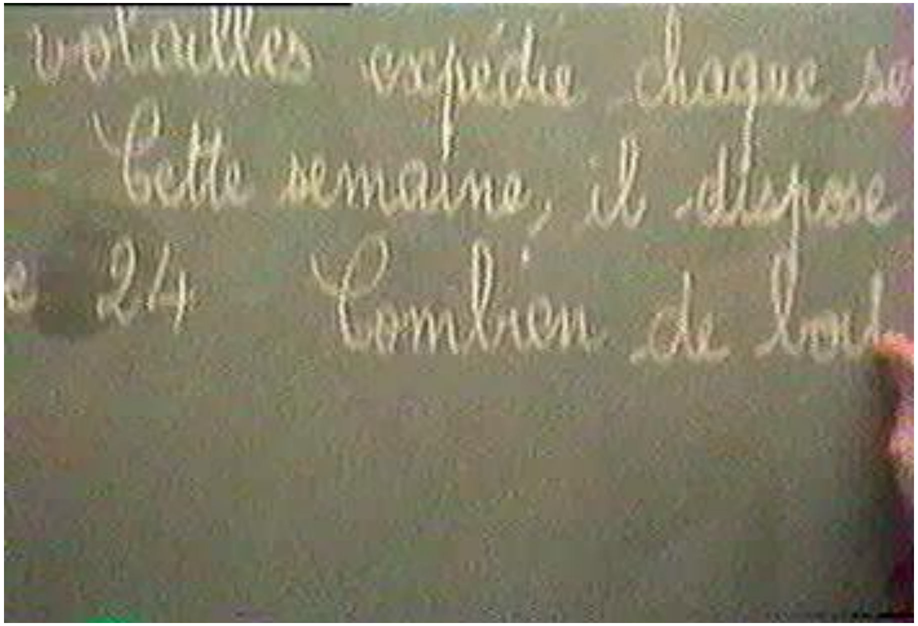
- **plus tard, contrôle par estimation** :
- exemple : 7053 divisé par 34 :

$34 \times 100 < 7053 < 34 \times 1000$

```
 7053 | 34
-6800 |
  253 | 34x200 = 6800
- 238 | 34x7 = 238
   15 |
```

207 reste 15

- **Le milieu est changé.** Ces ruptures, sont organisées par le professeur sur une période longue. (chantier)


volailles expédie chaque
Cette semaine, il dispose
24 Combien de

A propos des décimaux
retour à plus de réalisme.

- Fractions et décimaux : Les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude de fractions simples (comme 1/2 1/4 1/3 2/3…) puis celle des fractions décimales.

- Du CM1 à la 6ème, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6ème.

- Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle 3 pour s'étendre aux dix-millièmes en 6ème.

Les opérations dans D.

-Addition et soustraction pour les nombres décimaux dès le CM1,

- Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier au CM2 ; multiplication de deux nombres décimaux en 6 ème.

- Division euclidienne dès le début du cycle 3, division de deux nombres entiers avec quotient décimal ; division d'un nombre décimal par un nombre entier à partir du CM2. Sera consolidé en 6°.

1-3 Les jeunes professeurs, les manuels scolaires

Les décimaux chez les professeurs des écoles arrivant en formation (enquête 2009).

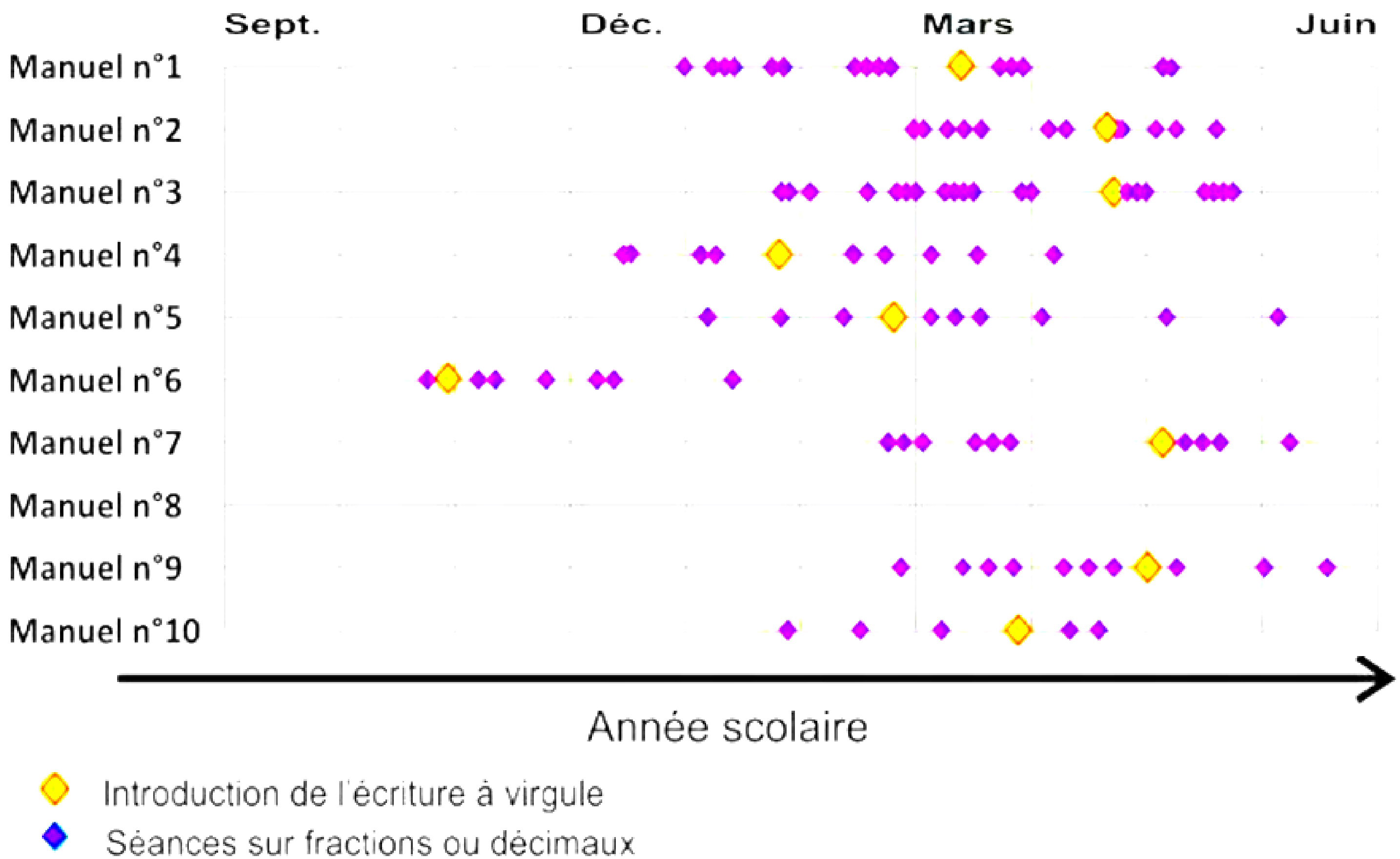
- ***Qu'est- ce qu'un nombre décimal ?*** Les réponses (correctes ou erronées) peuvent être classées en cinq catégories :

- \- Définition basée sur l'écriture (*nombre à virgule - avec un nombre fini ou infini de décimales -, deux nombres séparés par une virgule, …*) ;
- \- Définition basée sur la place des décimaux par rapport aux entiers (*nombre non entier, nombre entier plus une partie fractionnaire, …*) ;
- \- Définition basée sur les fractions (*nombres fractionnaires, nombres fractionnaires se finissant, fractions décimales, …*) ;
- \- Définition liée à la division (*résultat d'une division de deux entiers, d'un entier par une puissance de dix, …*) ;
- \- Définition liée aux puissances de dix ou la numération (*produit d'un entier par une puissance de dix, sommes de fractions décimales*).

Recherche effectuée auprès de lauréats du concours PE académie de Bordeaux. (E.Comin).

Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case de votre choix :			
$\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel.	VRAI **42**	FAUX **11**	JE NE SAIS PAS **45**
$\frac{5}{7}$ est un nombre décimal.	VRAI **50**	FAUX **37**	JE NE SAIS PAS **11**
Tout rationnel est décimal.	VRAI **11**	FAUX **47**	JE NE SAIS PAS **39**
Tout décimal est rationnel.	VRAI **39**	FAUX **18**	JE NE SAIS PAS **39**

Fractions et décimaux au CM1
écriture fractionnaire et écriture à virgule



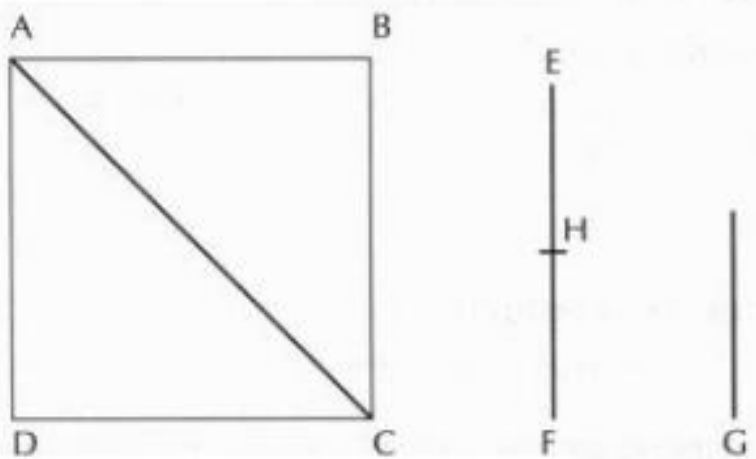
1-4 Questions autour des nombres décimaux

Des p'tits trous, encore des p'tits trous…

- Avec les décimaux et les fractions on doit couvrir toute la droite numérique ??
- Eh ! non….

- Les Pythagoriciens montrent que la mesure de « ? » n'est pas une fraction… mais 1,414 suffit dans les activités humaines traditionnelles.

Démonstration



D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = 2AB^2$ donc $\frac{AC^2}{AB^2} = 2$. Si le rapport $\frac{AC}{AB}$ est un rationnel, alors il existe deux segments qui sont dans le même rapport et qui sont les plus petits. (Il existe une fraction irréductible égale à $\frac{AC}{AB}$. Cette fraction irréductible est $\frac{EF}{G}$. [G est la mesure d'un segment : cf. figure].) Alors $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{EF^2}{G^2}$ donc $EF^2 = 2G^2$ donc EF est pair, donc EF^2 est multiple de 4. Alors G^2 est pair, donc G est pair, donc $\frac{EF}{G}$ n'est pas irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc le rapport ne peut être un rapport de deux nombres entiers.

Leur intérêt

- Approcher d'aussi près que l'on toute mesure d'une grandeur, donc tout nombre réel,
- Exprimer la mesure de grandeurs continues avec l'approximation voulue,
- Prolonger, sans trop de surcoût, les règles de calcul de notre numération décimale écrite des nombres entiers,
- Mais aussi, éveiller la curiosité dans l'exploration de la droite numérique.

Il y a donc toutes sortes de nombres pour rendre compte de mesures !

- **Trois petits problèmes**

Avec 13 billes, 4 lots, combien de billes par lot?

Se traite avec les nombres entiers : 3 billes. Il en reste une.

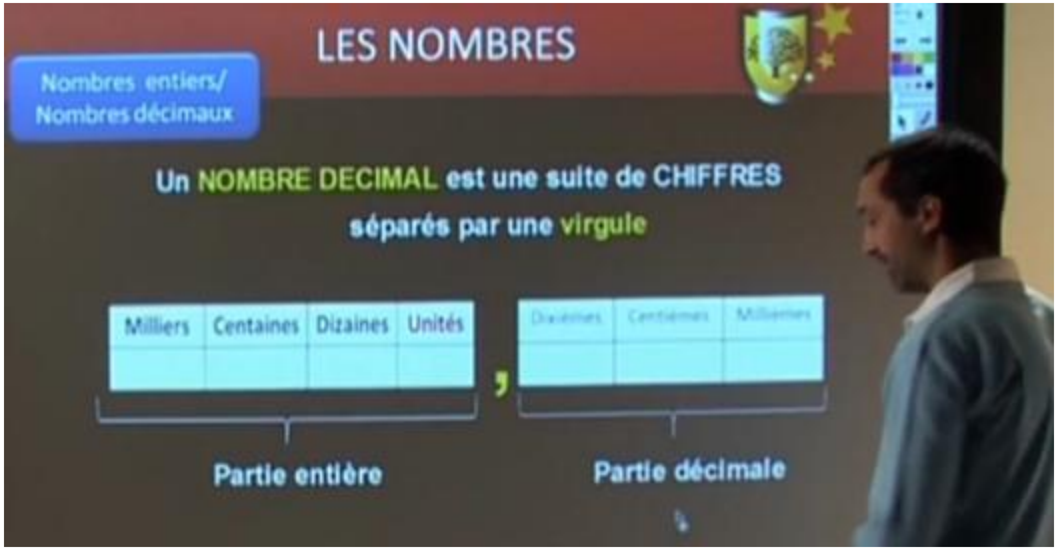
Avec une bande de 13 m, 4 morceaux de même longueur, quelle longueur pour chaque morceau?

Se traite avec les nombres décimaux : 3,25 m.

Avec une bande de 13 m, 3 morceaux de même longueur, quelle longueur pour chaque morceau?

Se traite avec les nombres rationnels : 13/3 m que l'on arrondi en fonction du contexte. Exemple : 4, 33 m.

Sur la toile…

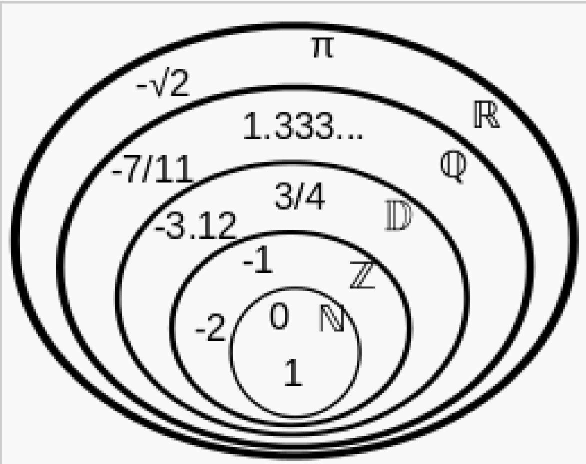


Ou comment définir un objet par son costume;;;
http://education.francetv.fr/matiere/mathematiques/sixieme/video/definir-les-nombres-entiers-

Définition mathématique : (inutile à donner en cycle 3 !)

a est décimal . il existe un entier relatif m et un entier naturel p tels que $a = \dfrac{m}{10^p}$

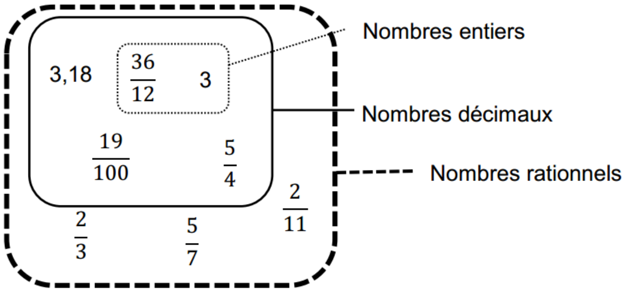
Des représentations classiques



Position de l'ensemble des décimaux D par rapport à l'ensemble des entiers relatifs Z et à l'ensemble des rationnels Q.

WIKIPEDIA

On peut schématiser la situation de la façon suivante :



EDUSCOL.

Mais un schéma qui donne une conception fausse de l'organisation des nombres. D'où la nécessité de travailler la droite numérique.

Petit problème

Essayons de ranger les « mots » suivants comme s'ils étaient dans un dictionnaire (les lettres étant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) :

1002 10134 102 10056 13

-L'ordre des décimaux est le même que celui du dictionnaire. Ce n'est pas celui des entiers naturels.

-Remarque : en physique 2,74 n'est pas 2,740

1-5 types d'obstacles à propos de la construction des nombres décimaux

Joël Briand 21 novembre 2018.

Définir la notion d’obstacle

« C’est dans l’acte même de connaître intimement qu’apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles. La compréhension s’acquiert contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites »

Gaston Bachelard (1919 - Le nouvel Esprit scientifique)

- **Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard.**
- **Ces erreurs sont reproductibles, persistantes.**
- **Elles sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, aberrante sinon correcte, une “connaissance” ancienne et qui a réussi dans un domaine d’actions »**

Les obstacles sont de natures différentes….

- Obstacle d’origine ontogénétique

lié à la personne qui apprend : son âge, ses difficultés

- Obstacle d’origine épistémologique

lié à la nature même de la connaissance : par exemple l’ordre des décimaux.

- Obstacle d’origine didactique

lié aux choix pédagogiques de l’enseignant : par exemple pour comparer 12,5 et 12, 47, comparer 12, 50 et 12,47.

Des erreurs persistantes… signes d'obstacles

E_I: $4{,}2 \times 2{,}3 = 8{,}6$
car 4 fois 2 font 8 et 2 fois 3 font 6

$5{,}8 + 2{,}3 = 7{,}11$
car 5 et 2 font 7 et 8 et 3 font 11.

E_2: $3{,}2 < 3{,}13$. car $2<13$

E_3: 1,23 et 1,230 sont des nombres différents.

E_4 : 2,63 et 2,64 sont des décimaux consécutifs car il n'y a pas de nombre entre 63 et 64.

E_5: $525 \text{ x } 0,3 > 525$ ou $525\text{x}0,3 = 1575$
car quand on multiplie, on obtient un nombre plus grand.

E_6: $15,6 \text{ x } 10 = 15,60$
ou encore $15,6 \text{ x } 10 = 150,60$
car pour multiplier par 10, il suffit de placer un 0 à droite du (des) nombre(s).

Voir document 2002 : https://www.apmep.fr/Les-decimaux-de-l-Ecole-au-College

Bien construire les exercices

Exemples:

1. Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants:

   4 5,677 3,15 3,14 5,5

2. Calculer

3,58 + 105,34 54,75 - 23,56 49,2 x 3

3. Trouver un nombre entre 2,34 et 2,37

LA
DISME,

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz,
tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

Premierement descripte en Flameng, et maintenant convertie en François,
par SIMON STEVIN *de Bruges.*

Décidons d'écrire $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{5}{1\,000}$

de la façon suivante : 3① 7② 5③

c'est-à-dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces.

Semblablement 8⓪ 9① 3②

valent 8 $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{100}$, ensemble $\frac{893}{100}$.

A propos des notations…

Notre dame de la Garde à Marseille (document 2011)…

Un manuel de mathématiques CM au Mexique (document 2008)

Quelques chiffres impressionnants :

Altitude de la colline	147,85 m
Hauteur des remparts	13,15 m
Hauteur de la Tour	33,80 m
Hauteur du piédestal de la statue	12,50 m
Hauteur de la statue monumentale	9,72 m
Poids de la statue	9,796 kg
Tour du poignet de l'enfant Jésus	1,10 m
Poids du Bourdon	8,234 kg
Hauteur du Bourdon	2,50 m
Poids du battant	387 kg

Ampliar el conocimiento sobre los decimales

Las apariencias engañan

1. En esta lección ampliarás tus conocimientos sobre los decimales. Pon mucha atención porque, a veces, las apariencias engañan.

- Ana dijo: **Mi cinta de medir tiene 2.30 metros de largo.**

Paula dijo: **La mía es más grande, ¡tiene 200 centímetros y 300 milímetros!**

¿Es cierto lo que dijo Paula? ____________ ¿Por qué? Discútelo con tus compañeros. Luego anota la conclusión que obtuviste con base en la discusión.

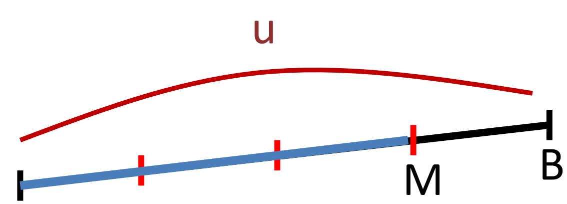
____

____

Las siguientes son las medidas de cuatro listones que Paula cortó. Ordénalas empezando por la menor: 5.25 m, 5.19 m, 5.3 m, 5.1740 m.

1-6 les fractions

Deux conceptions des fractions

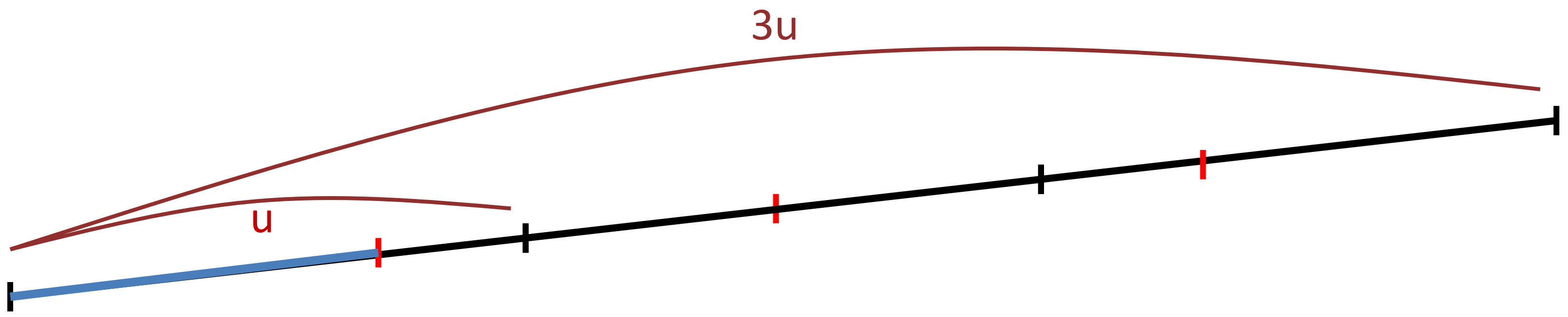


$$\frac{3}{4}u = 3x\frac{1u}{4}$$

-« 3 quarts » renvoie au partage du segment unité (de mesure 1) qui est fractionné en 4 parts égales (par pliage) et l'on prend 3 de ces quarts. Dans ce cas, on parle de « fractionnement de l'unité ».

$$\frac{3}{4}u \text{ est la mesure du segment } [AM]$$

Autre conception



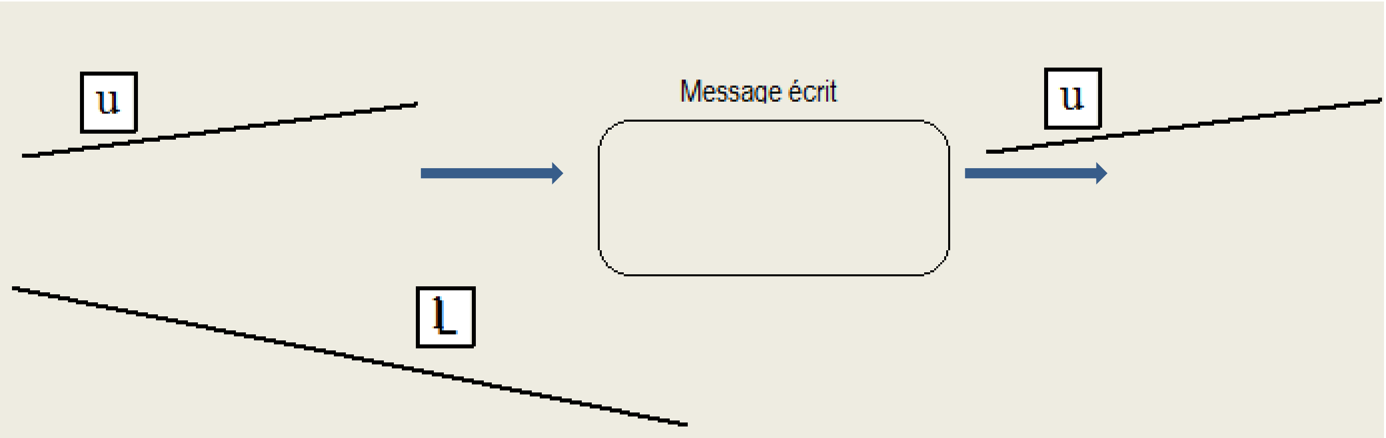
$$\frac{3}{4}u = \frac{3u}{4}$$

-« 3 divisé par 4 » renvoie au partage d'un segment de mesure 3u en 4 segments de mesures égales (cela peut être un segment de mesure 3u, mais cela peut être aussi 3 pizzas, etc.). On parle alors de « commensuration ».

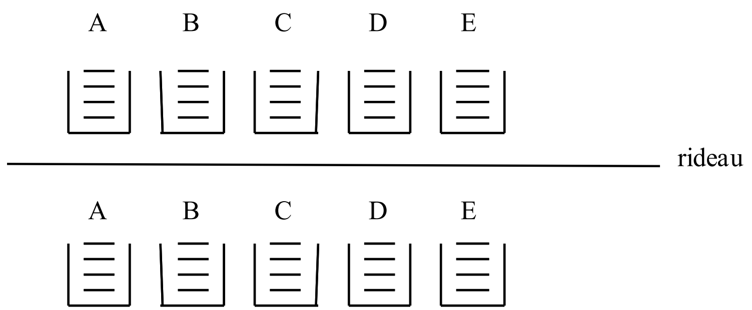
C'est cette seconde conception qui donne du sens à la « fraction quotient ».
« Pour faire 3 u il faut 4 u'» ; « 4 x = 3 »
Les programmes 2016 renvoient à la 6° cette conception des fractions.

Fractionnement de l’unité

Un consensus assez large apparaît chez les formateurs pour introduire les fractions à partir d’une situation proposée par M.J. Perrin et R. Douady (1986).
Il s’agit d’une situation de communication dans un contexte de mesures de longueur pour mettre en œuvre l’aspect fractionnement.
Situation : Une longueur L et une unité u étant données, il s’agit de rédiger un code permettant à un lecteur, disposant de la même unité, de tracer un segment de même longueur.



Commensuration



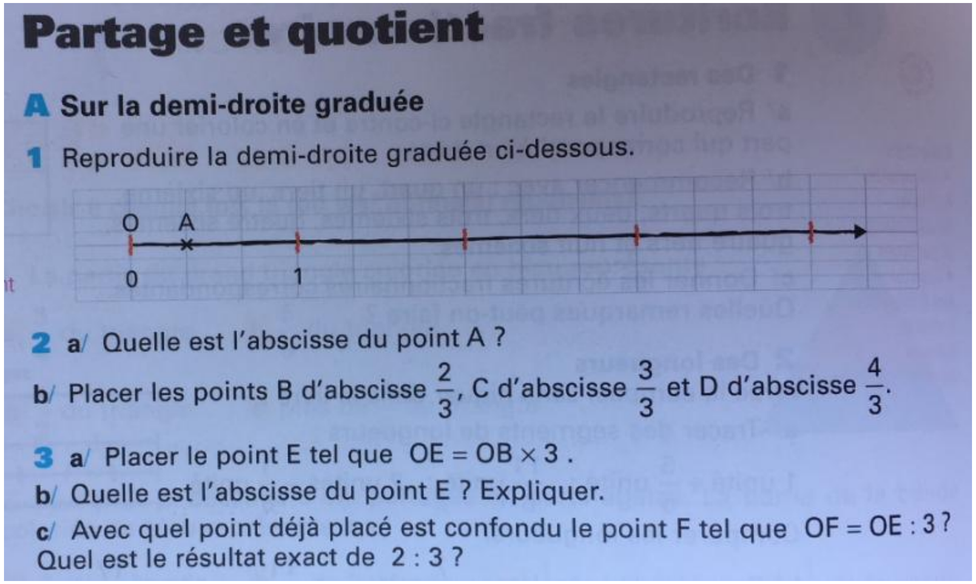
Situation : la classe est partagée en 2 équipes.
Les élèves disposent de moyens de mesurage (règle graduée ou pied à coulisse).
Il s'agit encore d'une situation de communication où les élèves doivent trouver un code pour repérer et différencier chaque tas dans un jeu de messages entre les deux équipes.

http://guy-brousseau.com/1883/rationnels-et-decimaux-dans-la-scolarite-obligatoire-1987-2/

Document d'accompagnement 6°

L'écriture $\frac{13}{5}$, dans la conception partage travaillée au cours moyen, représente « 13 cinquièmes de l'unité ». Or, un cinquième de l'unité, c'est l'unité partagée en 5 ; une unité est égale à dix dixièmes, un cinquième de l'unité est donc égal à 2 dixièmes de l'unité[10] ; on montre ainsi que « 13 cinquièmes de l'unité » est égal à 13 fois 2 dixièmes de l'unité, soit 26 dixièmes, ou 2,6. Ce raisonnement permet de valider le fait que l'écriture $\frac{13}{5}$, sera aussi utilisée pour noter le quotient de 13 par 5 ; on parlera cette fois de la conception quotient de la fraction $\frac{13}{5}$.

De la fraction partage à la fraction quotient



Partage et quotient

A Sur la demi-droite graduée

1 Reproduire la demi-droite graduée ci-dessous.

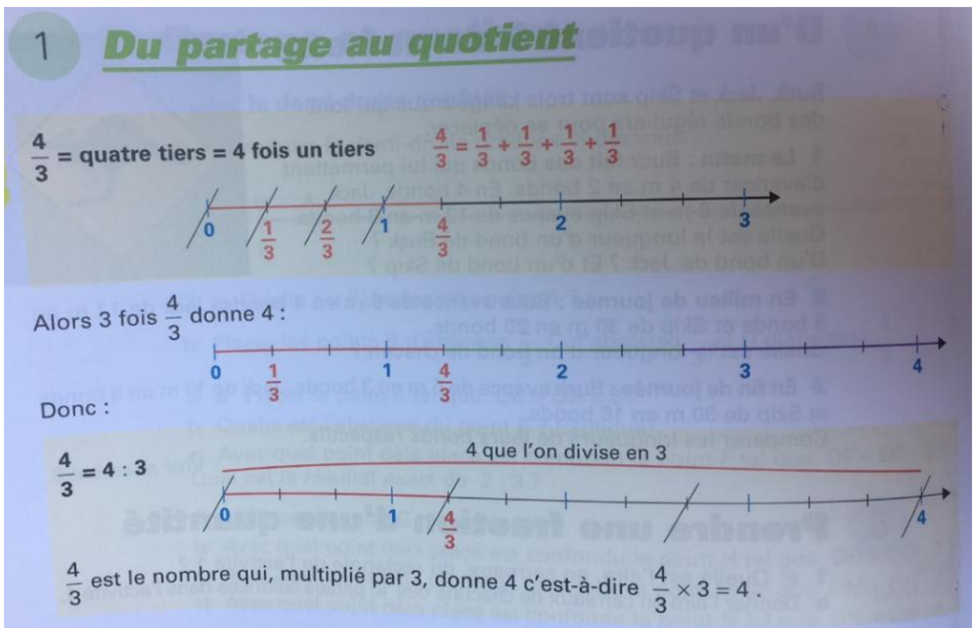
2 a/ Quelle est l'abscisse du point A ?

b/ Placer les points B d'abscisse $\frac{2}{3}$, C d'abscisse $\frac{3}{3}$ et D d'abscisse $\frac{4}{3}$.

3 a/ Placer le point E tel que $OE = OB \times 3$.

b/ Quelle est l'abscisse du point E ? Expliquer.

c/ Avec quel point déjà placé est confondu le point F tel que $OF = OE : 3$? Quel est le résultat exact de $2 : 3$?



1 Du partage au quotient

$\frac{4}{3}$ = quatre tiers = 4 fois un tiers $\quad \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

Alors 3 fois $\frac{4}{3}$ donne 4 :

Donc :

$\frac{4}{3} = 4 : 3$ — 4 que l'on divise en 3

$\frac{4}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 4 c'est-à-dire $\frac{4}{3} \times 3 = 4$.

- **Passer de l'abscisse à la longueur du segment ne va pas de soi.**
- **Si cette incertitude est levée, la démarche est adaptée.**

Nature des objets traités

- Une fraction :
- renvoie à la fraction proportion si le numérateur et le dénominateur sont des grandeurs de nature différentes
- fraction rapport si les grandeurs sont de même nature
- fraction de l'unité si le numérateur est un, le dénominateur étant le fractionnement de l'unité
- fraction d'une quantité si le numérateur est une grandeur et le dénominateur un nombre

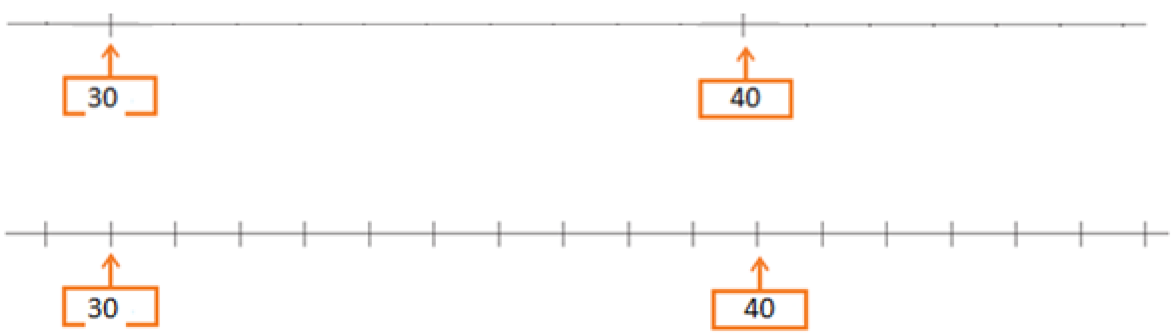
1-7 les représentations : la droite numérique objet d'enseignement

La droite : outil/objet

- La droite graduée est un outil très performant pour comparer et ordonner les nombres ainsi que pour mettre en place certaines procédures de calcul, notamment les calculs additifs et soustractifs par sauts et le calcul de division par encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur.
- Ce travail est peu abordé à l'école. Il est souvent confondu avec l'étude du double décimètre et des unités légales de longueur.
- C'est la genèse du système métrique qui devrait faire partie des découvertes des cycles trois et quatre. (lien entre histoire et mathématiques).

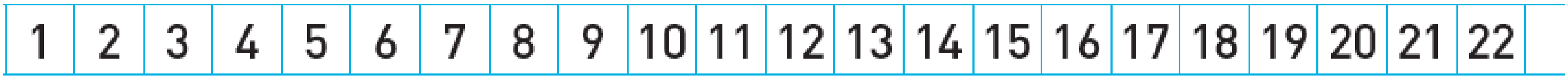
Nécessité de construire une image mentale de la droite numérique

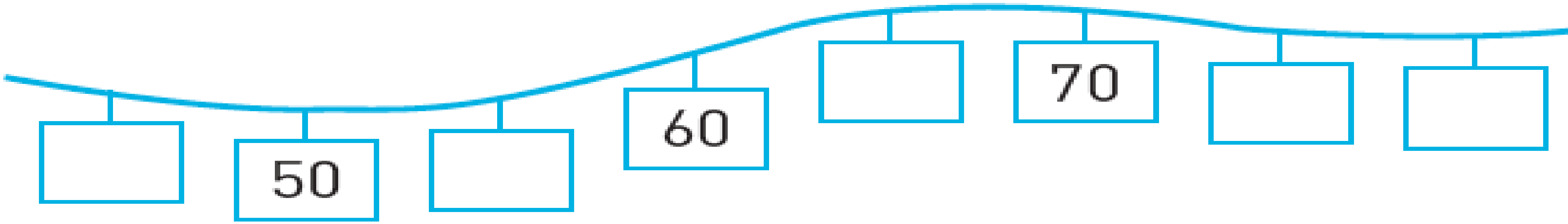
.

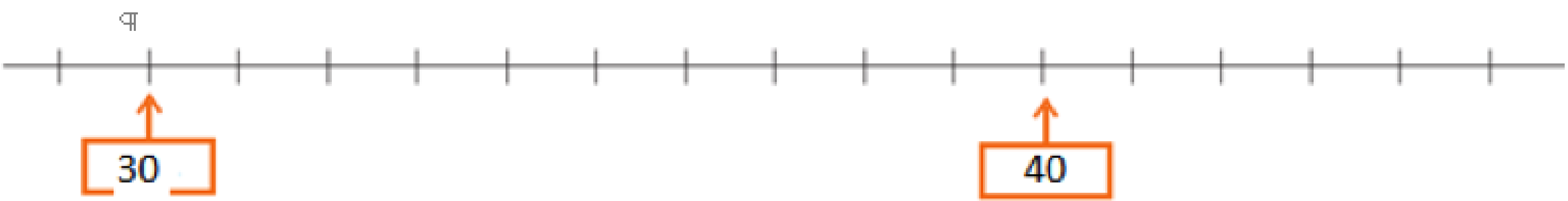


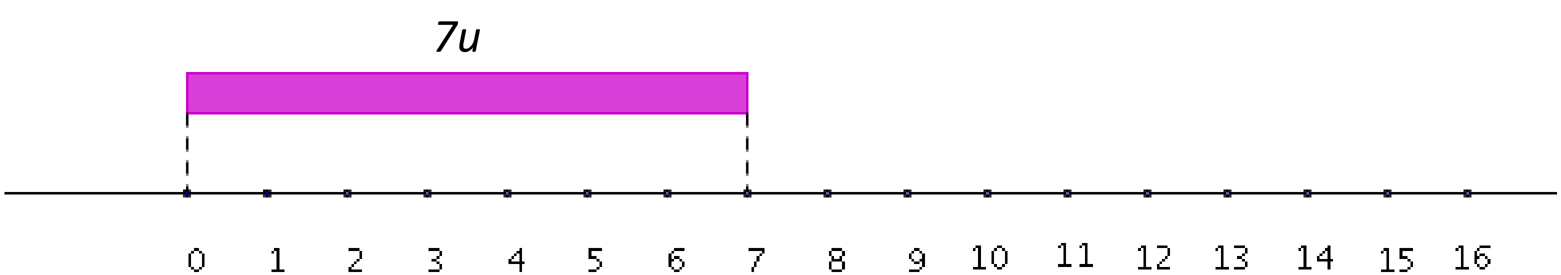
- Travailler le lien entre distance (notion géométrique : nombre de graduations) et écart (notion numérique : l'écart 37-15)
- Permet de donner du sens à
  - « 36 est entre 30 et 40 »
  - « 39 est proche de 40 »
  - « 35 est entre 30 et 40. Il est juste au milieu »
  - « 35 est à égale distance de 30 et 40 »
  - Etc.

Piste, file, droite numérique, double décimètre : du discret au mesurable

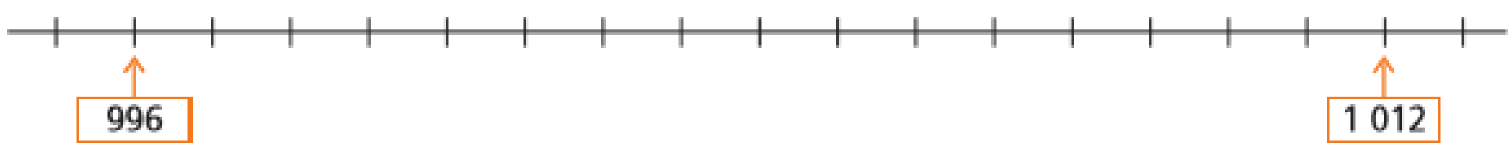








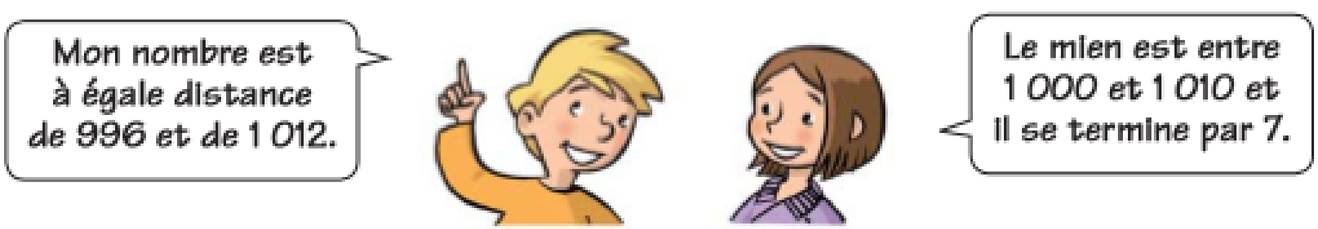
1



a. Complète : « Cette droite est graduée de … en … ».

Reproduis la droite graduée et place le nombre 1 000.

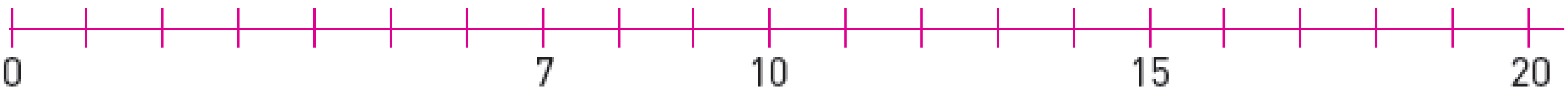
b.



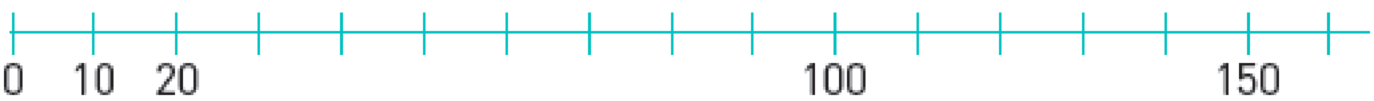
Différentes échelles de graduation…
… vers la proportionnalité (CE2, CM1)

Pour représenter les nombres, on peut les placer

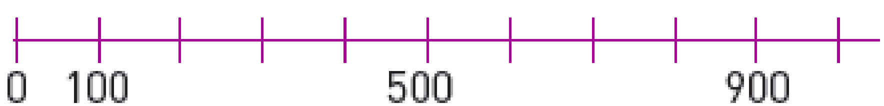
– sur une droite graduée de 1 en 1.

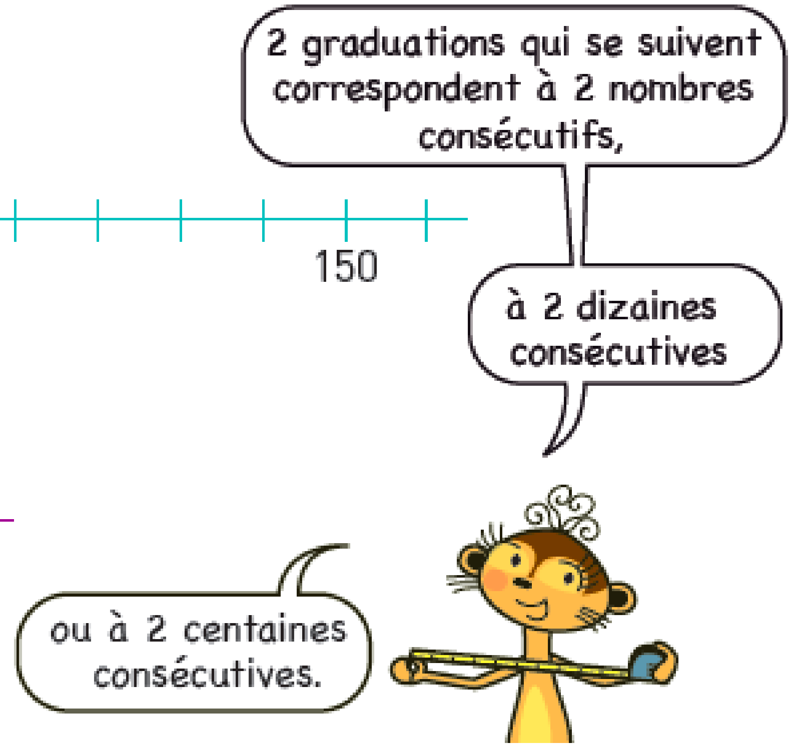


– sur une droite graduée de 10 en 10.

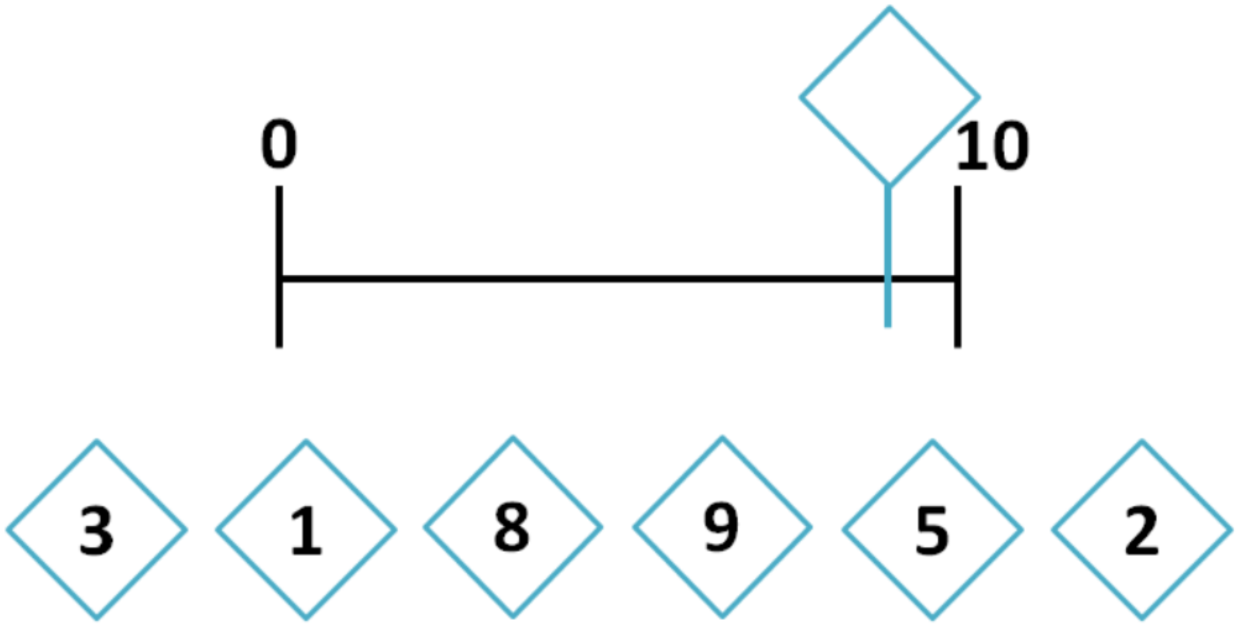


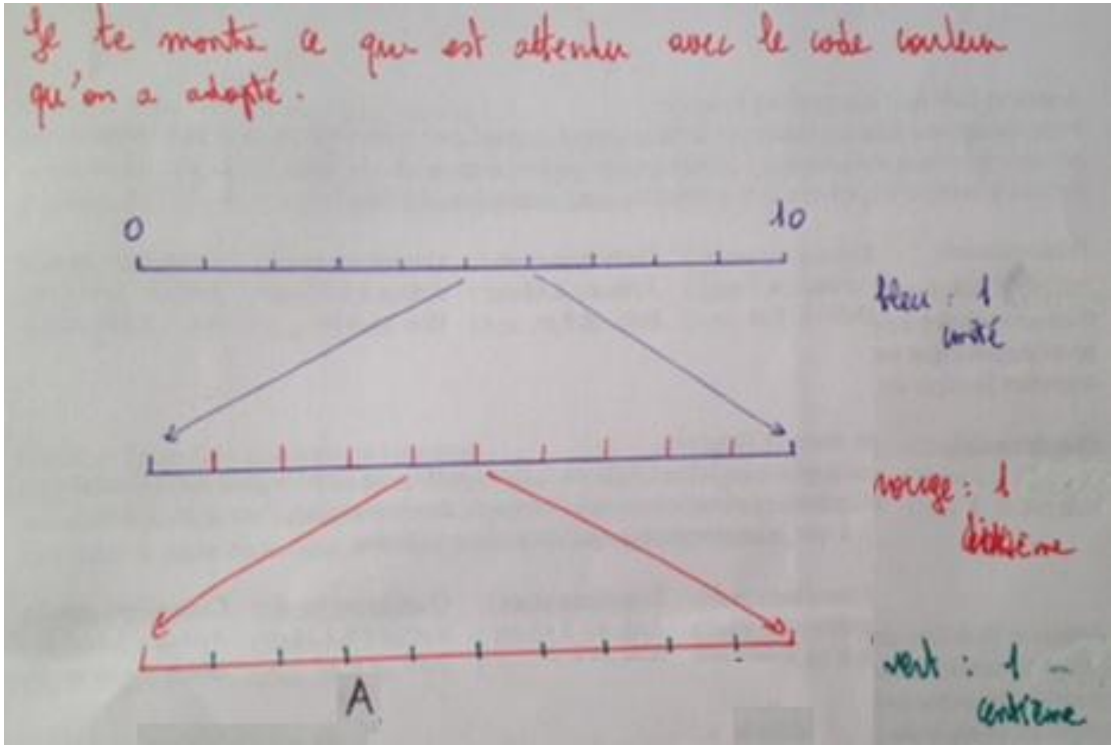
– sur une droite graduée de 100 en 100.

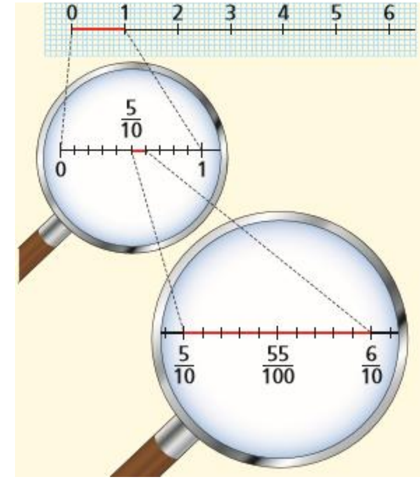




Exercice 6 des repères CP 2018







Claire et Dina font des sauts en longueur.
Pour chacun des 5 essais, place les lettres C (pour Claire) et D (pour Dina) le plus précisément possible pour que ton camarde puisse retrouver la longueur de chaque saut. Pour cela, il faut respecter la règle du jeu que je te montre avec un exemple au tableau.

Premier essai :	Deuxième essai :	Troisième essai :	Quatrième essai :	Cinquième essai :
Claire : 4,6 m	Claire : 4,8 m	Claire : 4,64 m	Claire : 5,389	Claire : 5,785 m
Dina : 5 m	Dina : 4,5 m	Dina : 4,7 m	Dina : 5,3 m	Dina 5,783 m

Partie 2

Les objectifs à atteindre

- Prendre conscience de l'insuffisance des entiers pour résoudre certains problèmes sur les grandeurs
- Envisager de nouveaux nombres pour résoudre ces problèmes
- Faire le lien entre ces nombres et les entiers
- Prolonger à ces nombres l'ordre des entiers
- Concevoir qu'entre ces nouveaux nombres, on peut toujours en intercaler un autre, ce qui est décisif pour la mesure
- Prolonger à ces nouveaux nombres les opérations
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des situations d'approximation dans le cadre de la mesure des grandeurs
- Utiliser ces nouveaux nombres dans des problèmes variés.

Des points d'appui

- La construction de fractions simples et surtout de fractions décimales est justifiée par le fait qu'elles sont utiles à une compréhension correcte des nombres décimaux

$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12{,}54$$

- Pour les fractions décimales, le passage à l'écriture à virgule est une simple convention

- Ce sont les fractions décimales qui permettent de travailler la signification des chiffres qui composent la partie décimale d'un décimal

Proposition pour une progression à l’école

Joël Briand 21 novembre 2018.

Nos choix

- Les fractions et les décimaux doivent apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les entiers ne permettaient pas de résoudre :

  - Problèmes de partage

  - Problèmes de mesures de longueur et d'aire

  -Problèmes de repérage d'un point sur une droite.

  -On ne demande pas une grande expertise des fractions en général : elles sont un point de passage. Le fractionnement de l'unité suffit.

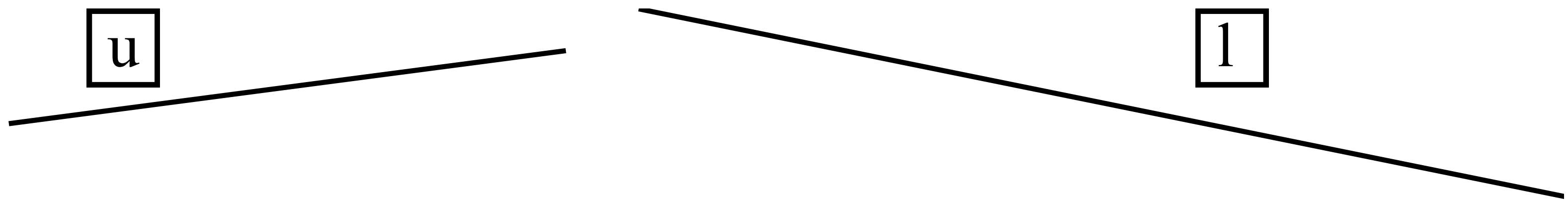
Premier bloc d'étapes (en période 4 du CM1)

1 : les fractions au quotidien

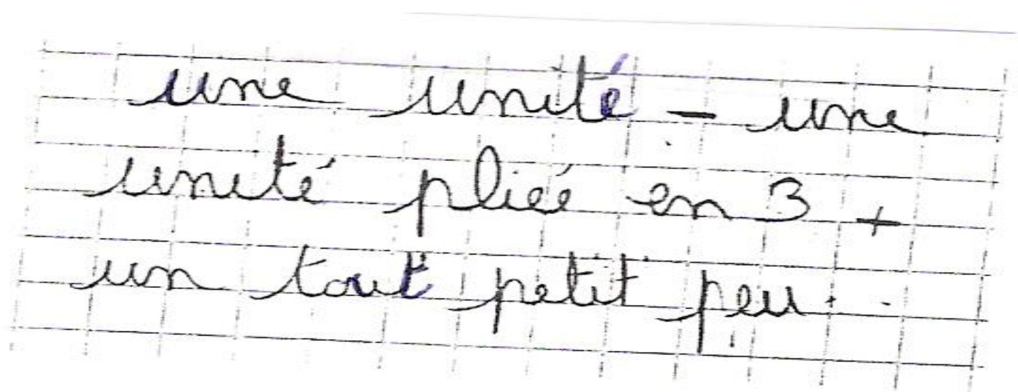
Evocation de situations quotidiennes dans lesquelles les fractions sont utilisées, plutôt que s’appuyer sur des pratiques telles que 3,25 pour 3 euros 25 centimes. (Obstacle).

Partage de bandes par pliage et limites…

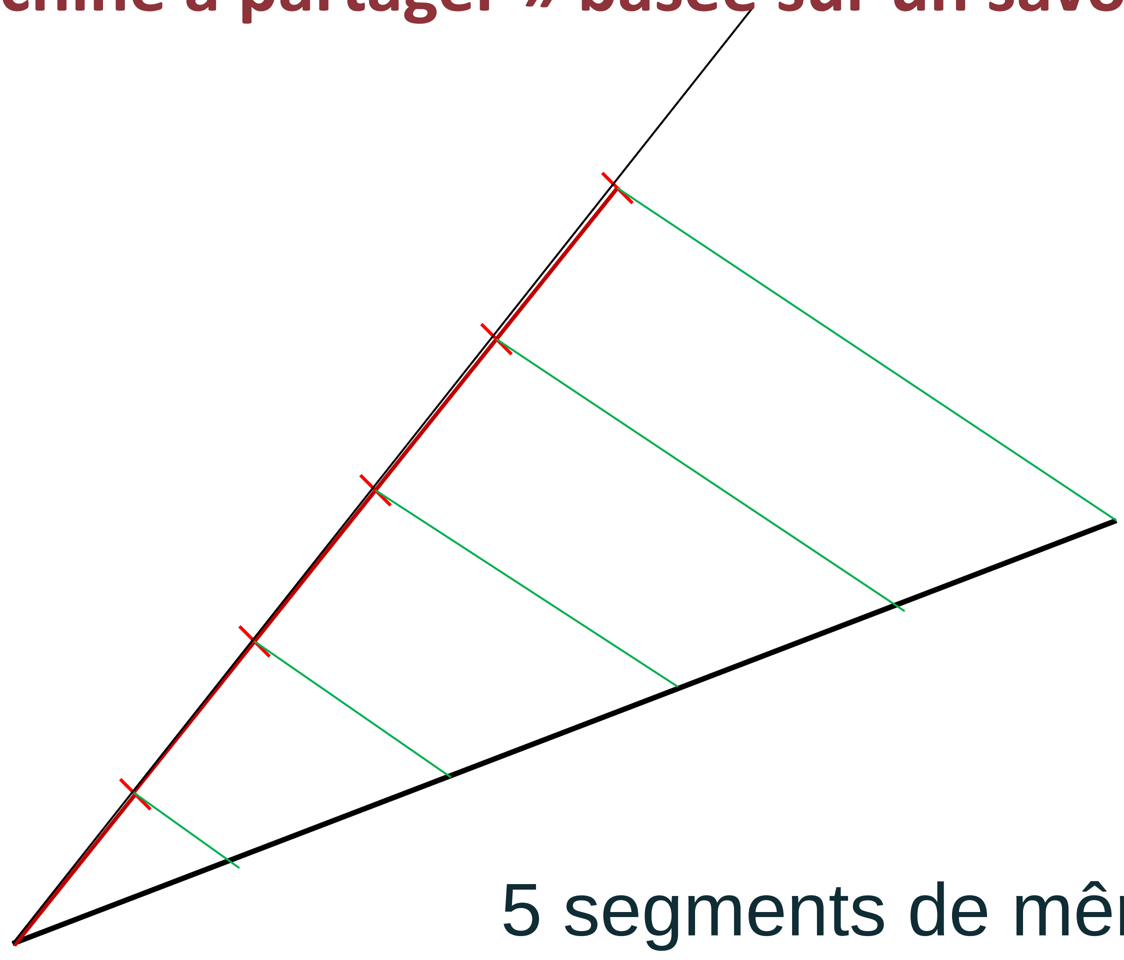
2 : Situation de communication



But : permettre de palier l'insuffisance des nombres entiers pour mesurer une longueur.
Situation : tracer un segment de même longueur qu'un segment donné à partir d'un message. Emetteur et récepteur ont le segment unité.
Cette situation permet la production de messages du type : *« Le segment mesure une unité plus la moitié de l'unité »* ou bien *« c'est u + 1/2 de u ».*

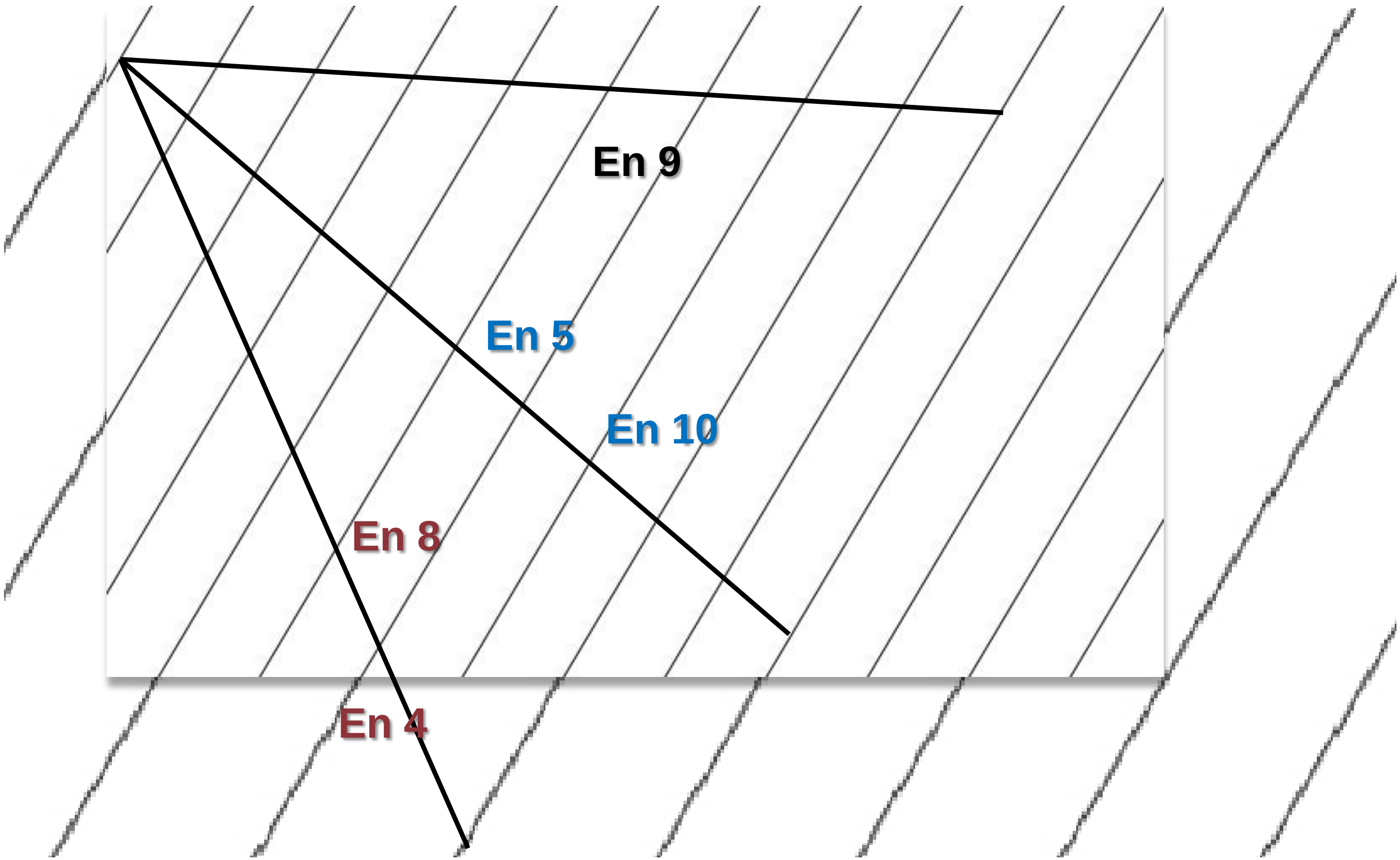


3 : « machine à partager » basée sur un savoir faire ancien…

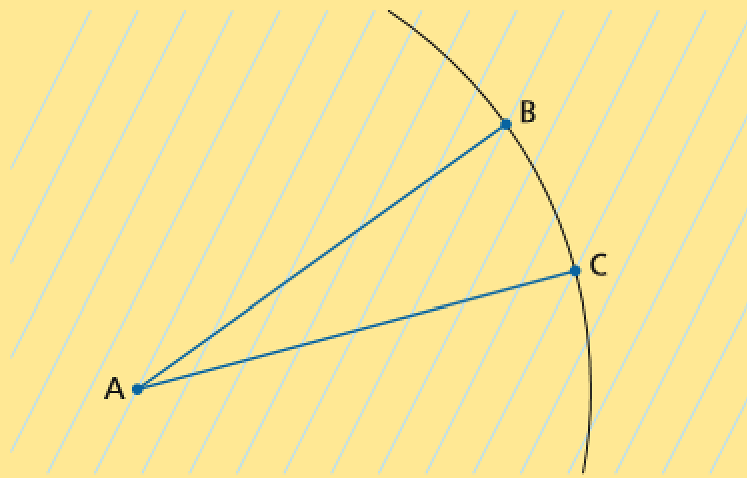


5 segments de même mesure

Environnement de fractions plus riche, avec, notamment les fractions décimales



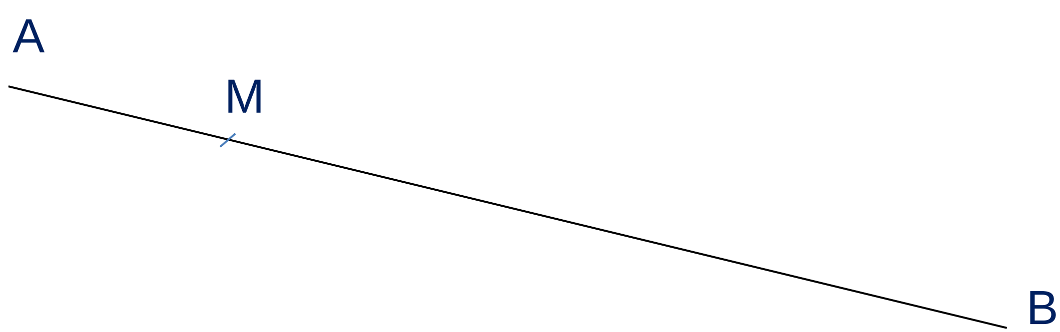
1



Une machine à partager est un réseau de droites parallèles à la même distance les unes des autres.

a En traçant un cercle de centre A et de rayon 1 u sur ta machine à partager, tu peux obtenir le partage du segment unité en parts égales.
En combien de parts le segment [AB] est-il partagé ?
En combien de parts le segments [AC] est-il partagé ?

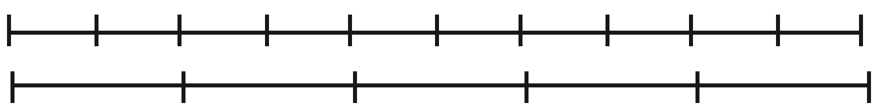
Repérer précisément un point sur un segment unité



4 : positionner une fraction sur la droite graduée

a. Donne la position des points G, H, I et J sur la droite.

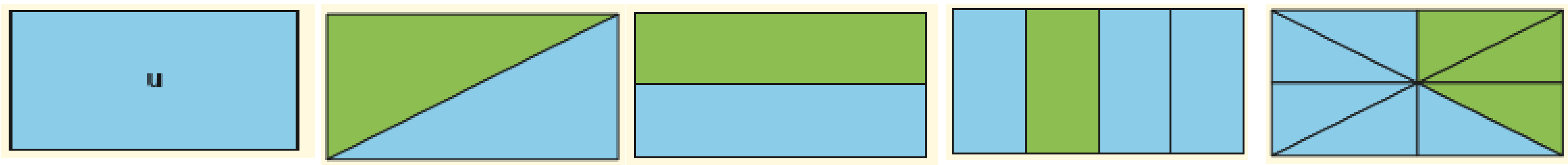
b. Sur cette droite place les fractions : $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{15}{10}$ $\frac{7}{10}$



3 désigne la position du point B sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AB.

$\frac{7}{10}$ désigne la position du point C sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AC.

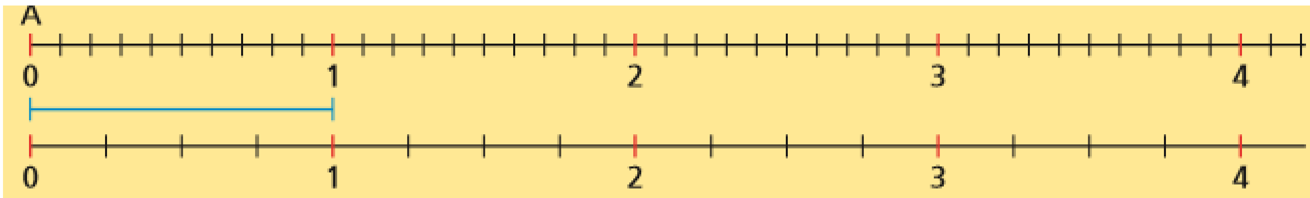
5 : utiliser les fractions pour résoudre des problèmes d'aires



Les fractions permettent aussi d'exprimer la mesure de l'aire de figures planes dès lors que l'on a choisi une aire unité.

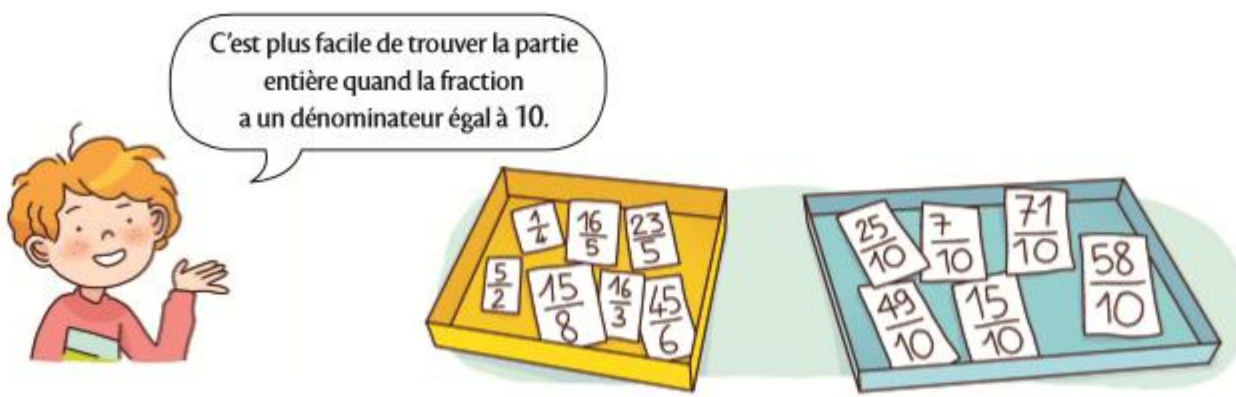
6 : les fractions décimales : leur avantage

Placer des fractions à l'aide de la graduation la mieux adaptée puis écrire la fraction sous la forme d'un entier et d'un « rompu »



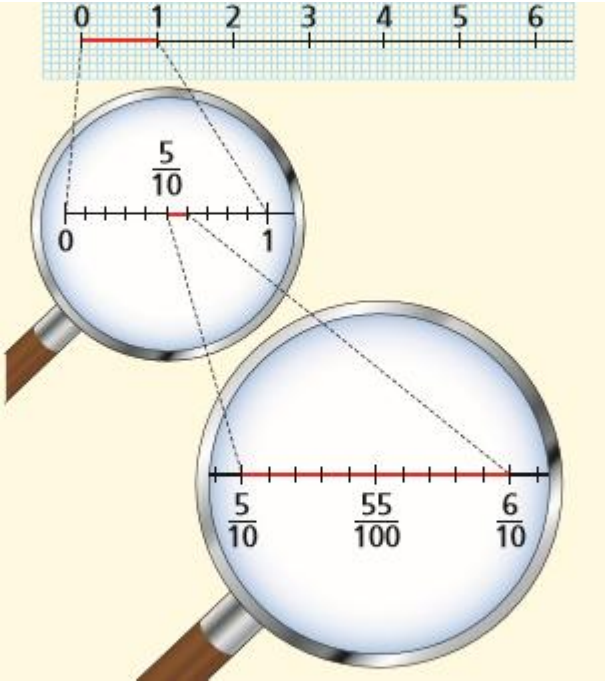
$\frac{3}{4}$ $\frac{22}{7}$ $\frac{32}{10}$ $\frac{45}{10}$ $\frac{17}{5}$ $\frac{21}{10}$

Lesquelles sont faciles à localiser à l'aide de leur écriture ?



7 : les fractions décimales : différentes écritures

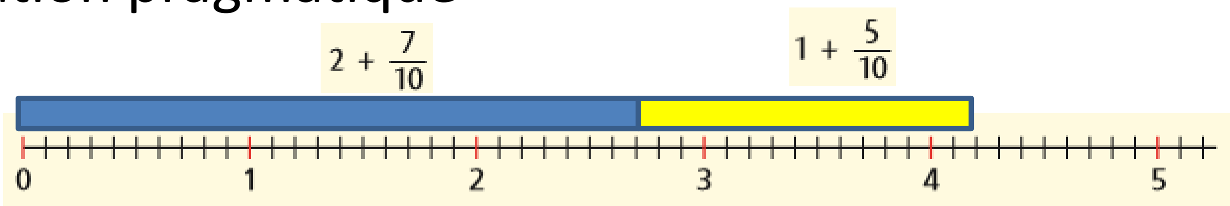
Enrichir la graduation : les centièmes



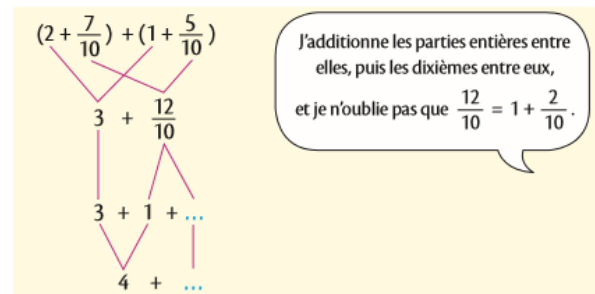
S'approprier différentes écritures

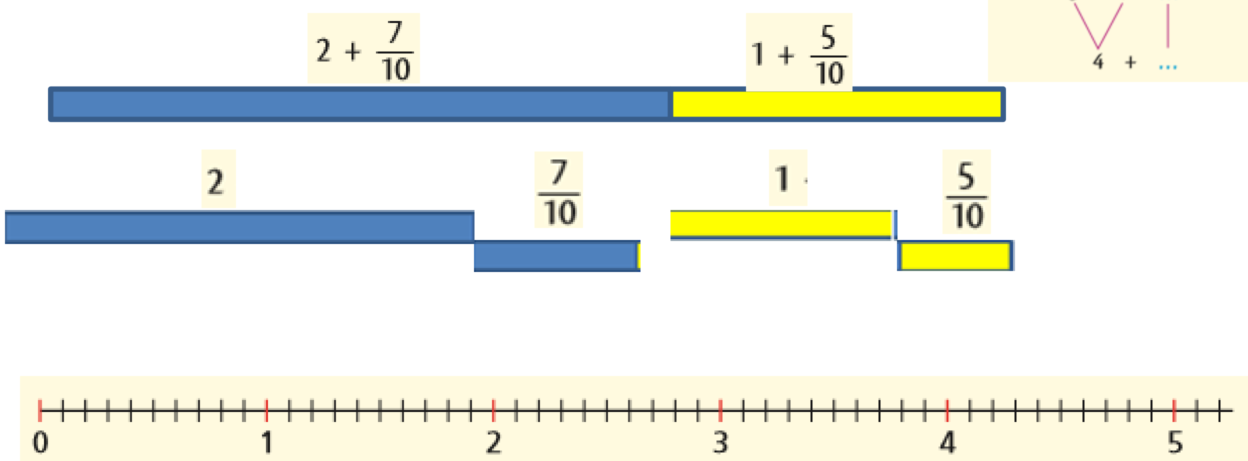
8 : les fractions décimales : les additionner

Validation pragmatique



Validation syntaxique avec retour au pragmatique





Travail effectué en classe de 6°

But : réfuter le modèle : $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$

La bande bleue a été mesurée à l'aide de la graduation réalisée en demi $\frac{1}{2}$

La bande jaune a été mesurée à l'aide de la graduation réalisée en cinquièmes : $\frac{2}{5}$

Question : « prévoyez par le calcul la mesure de la bande obtenue en mettant bout à bout».
Une fois les prévisions effectuées, vérification à l'aide du matériel

Second bloc d’étapes
(en période 5 du CM1)

Le second bloc d'étape consiste en le passage conventionnel
à l'écriture à virgule.

9 : les nombres décimaux : écritures à virgule (Stevin)

Convention d'écriture.

$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12{,}54$$

10 : Les additionner

La situation

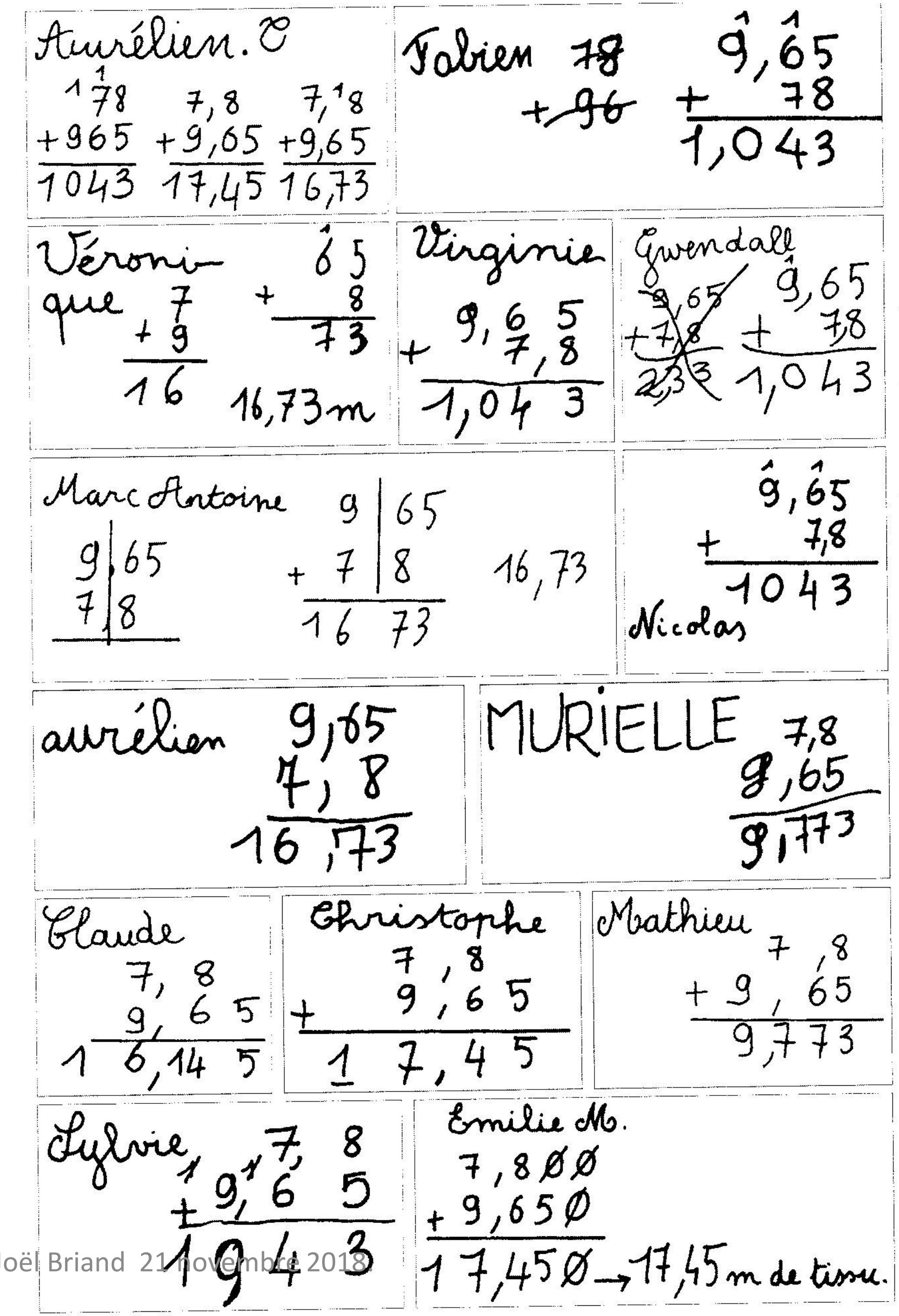
La reprise sur le manuel

Deux méthodes de calcul

$$1{,}45 + 2{,}7 = \left(1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}\right) + \left(2 + \frac{7}{10}\right) = \dots$$

$$\begin{array}{r} 1{,}45 \\ +\ \ 2{,}7 \\ \hline \end{array}$$

Vu en classe de CM1



11 : les comparer

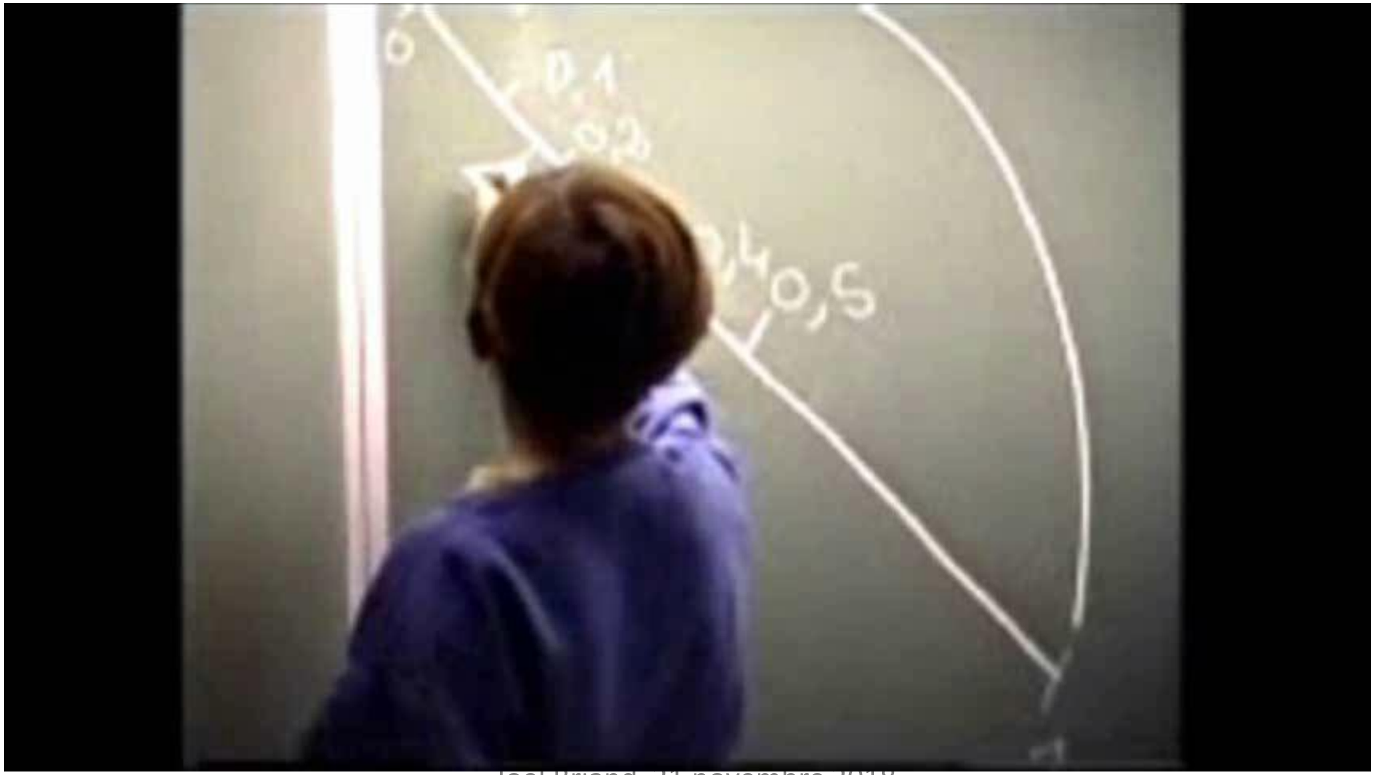
La situation : le travail sur la droite numérique révèle des difficultés et des connaissances erronées

Jeu de l'explorateur : ici le nombre caché est 0,111.

0,1 et 0,2 sont déjà placés. Les élèves savent que le nombre caché est entre 0,1 et 0,2.

La question est « est-il entre 0,15 et 0,20 ? ». La réponse est « non ».

Un enfant vient placer ces nombres au tableau.



11(2) : les comparer
reprise sur le manuel

Questions de Zora	Réponses de Lucas
Est-il plus grand que 10 ?	Non
Est-il plus grand que 5 ?	Non
Est-il plus grand que 3 ?	Oui
Est-il plus grand que 4 ?	Non
Est-il plus petit que 3,5 ?	Non
Est-il plus petit que 3,8 ?	Oui
Est-il plus grand que 3,6 ?	Oui

12 : Les soustraire

L'évocation de la situation sur la manuel

La consolidation de la soustraction à la russe *(voir plus tard si le temps le permet)*

$$2{,}34 - 1{,}6 \quad \xrightarrow{+0{,}4} \quad 2{,}74 - 2$$

$2{,}34 - 1{,}6 = \dots$

Le rappel du traitement de la soustraction par conservation des écarts

$$\begin{array}{rrrr} & 2, & {}^{10+}3 & 4 \\ - & {}^{1+}1, & 6 & \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

13 : Les convoquer dans des problèmes

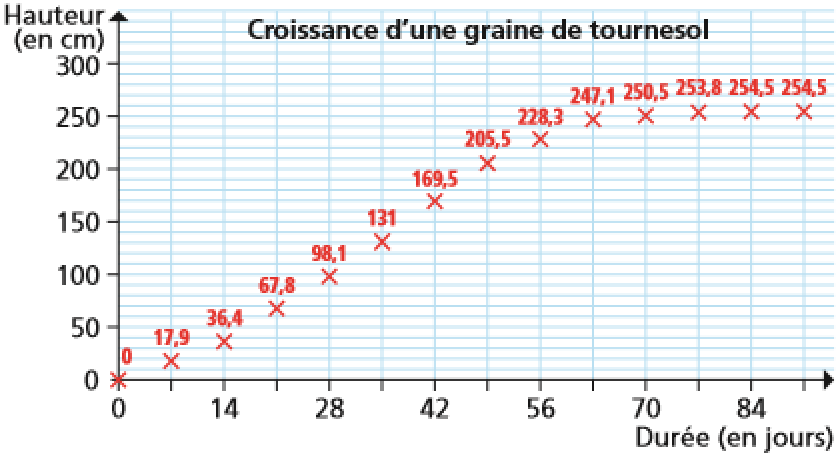
Nom	Nationalité	Sauts					
TAKAKUWA Saki	Japon	X	4,67	X	4,83	5,09	5,01
van GANSEWINKEL Marlene	Pays-Bas	5,27	4,85	4,79	4,73	5,14	X
NAKANISHI Maya	Japon	X	4,92	4,72	4,50	X	X
WALSH Sarah	Australie	4,76	4,18	4,72	4,16	4,52	4,40
LE FUR Marie-Amélie	France	5,63	5,51	5,74	5,61	5,65	5,84
PRUYSEN Iris	Pays-Bas	5,00	X	X	4,67	X	4,90

Quelle unité a été choisie pour écrire ces résultats ? Quel est le meilleur saut de chaque athlète ?

Quelle est la championne du monde 2015 ? Quelle est la seconde, puis la troisième ?

En quelle position Sarah Walsh est-elle arrivée ?

Range ces 6 athlètes selon leur meilleur saut.
Vérifie tes réponses en écrivant la longueur de chaque saut en mètres et centimètres.



5 **Convertis en grammes.**
a. 1,5 kg b. 2,35 kg c. 0,75 kg d. 0,5 kg e. 0,25 kg

6 **Convertis en kg.**
a. 500 g b. 2 500 g c. 750 g d. 250 g e. 100 g

Affiche 34,52. Sans effacer l'écran ni passer par 0, affiche maintenant 34,62.
Affiche 5,37. Sans effacer l'écran ni passer par 0 affiche maintenant 5,36.

Donne un ordre de grandeur de chaque résultat puis utilise ta calculatrice pour effectuer les calculs.
a. 54,74 + 127,5 + 86,09 b. 617,24 – 542,76 c. 457 × 35

Avec ta calculatrice, **trouve** le quotient de la division de 4 732 par 56,
puis **utilise** l'écriture en ligne de cette division pour trouver le reste.

En CM2 :
le cas du produit d'un décimal par un entier, tout va bien!

a. Théo

$$
\begin{array}{r}
2{,}35 \\
+\ 2{,}35 \\
+\ 2{,}35 \\
+\ 2{,}35 \\
\hline
\dots\dots\dots
\end{array}
$$

b. Qwang

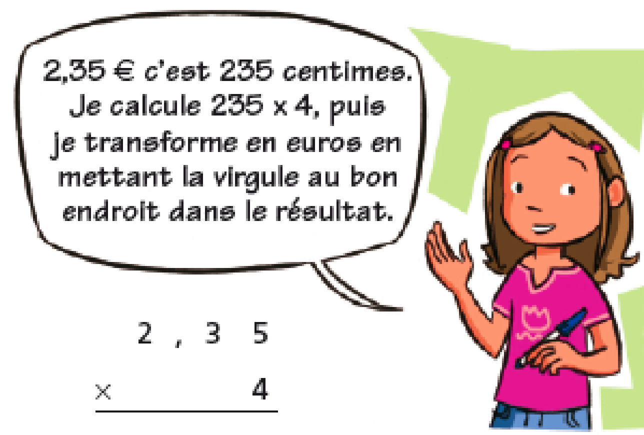
	2	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{100}$
4	$4 \times 2 = \dots$	$4 \times \frac{3}{10} = \dots$	$4 \times \frac{5}{100} = \dots$

$2{,}35 \times 4 = \dots$

c. Leïla propose alors la multiplication en colonne, pas à pas.

$$
\begin{array}{rl}
2{,}35 & \\
\times\quad 4 & \\
\hline
\dots\dots\dots & \leftarrow 4 \times 0{,}05 \\
\dots\dots\dots & \leftarrow 4 \times 0{,}3 \\
\dots\dots\dots & \leftarrow 4 \times 2 \\
\hline
\dots\dots\dots & \leftarrow 2{,}35 \times 4
\end{array}
$$

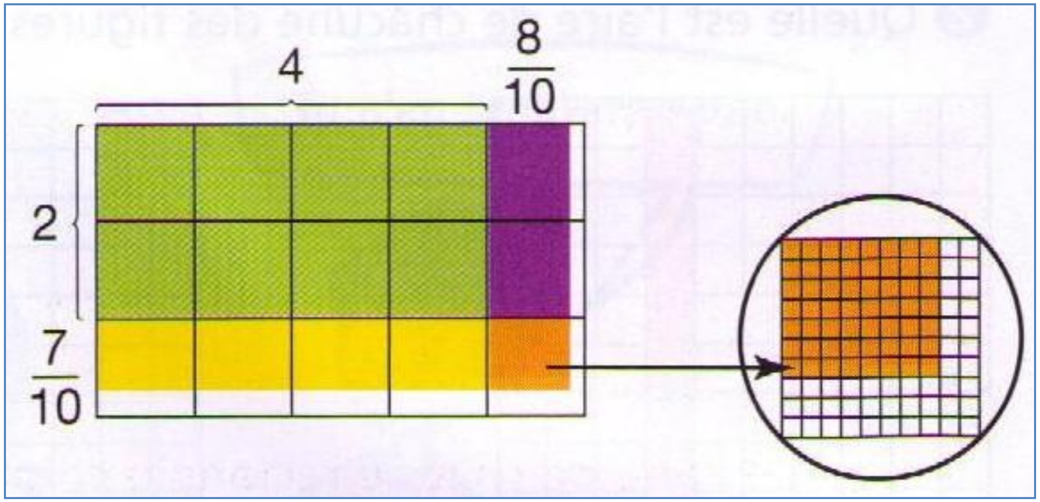
d. Alice

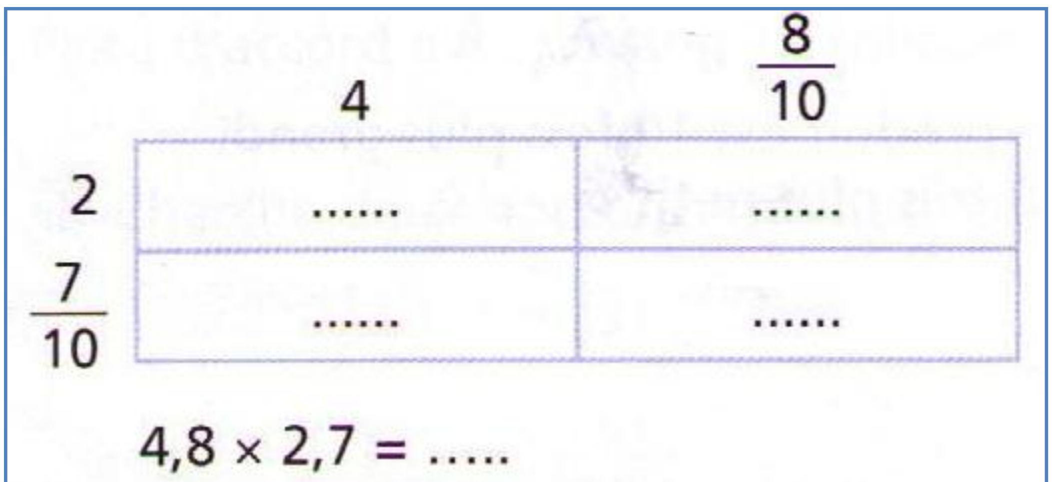


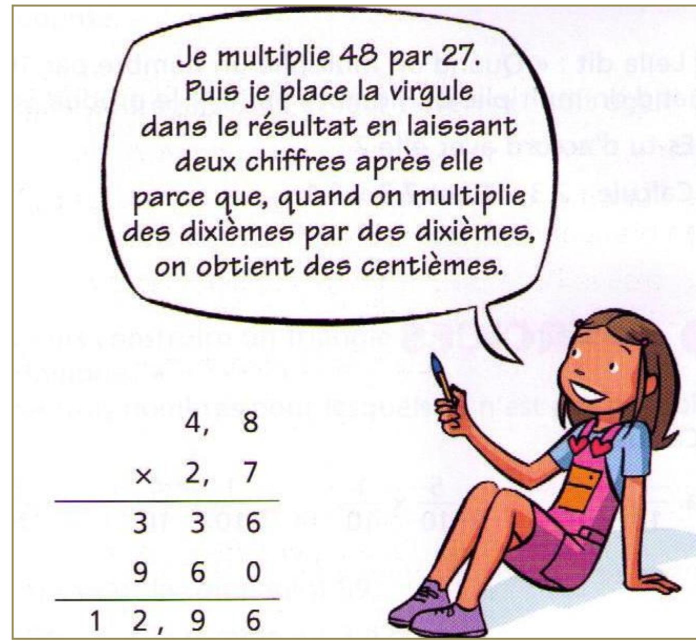
$$
\begin{array}{r}
2{,}35 \\
\times\quad 4 \\
\hline
\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Produit de deux nombres décimaux

entre école et collège selon les effets de manches des ministres







La division décimale avec quotient décimal : en 6°

Moi, je pose la division de 4,25 par 3.
Quand je retranche 3 au dividende, il reste 1,25.
Je cherche par combien de dixièmes je dois multiplier 3 pour approcher 1,25, je trouve 4 dixièmes car 3 × 0,4 = 1,2.
Puis je retranche 1,2 à 1,25 je trouve 0,05 et je continue en cherchant par combien de centièmes je dois multiplier 3 pour approcher 0,05.

$$\begin{array}{r|l} 4,2\;5 & 3 \\ \cline{2-2} -\;3 & 1,4 \\ \cline{1-1} 1,2\;5 & \\ -\;1,2 & \\ \cline{1-1} 0,0\;5 & \end{array}$$

Conclusion

- L'enseignement des nombres décimaux à l'école suppose plus qu'ailleurs en mathématiques une formation de qualité auprès des futurs professeurs des écoles.

- Les tutoriels sur le WEB sont à prendre avec précaution.

- La droite graduée n'est pas encore suffisamment prise comme objet d'étude. La compréhension de la double signification des nombres sur cette droite est nécessaire pour la compréhension des fractions et de l'addition de celles-ci.

- Il serait gratifiant de faire comprendre que le système métrique permet d'opérer sur les mesures en se servant des opérations dans les nombres, sans conversions fastidieuses.

Quelques conseils

Travaillez la consigne
Installez les élèves dans la durée des apprentissages (chantiers, micro-séquences pour le groupe).

Réfléchissez à l'individualisation des parcours en maintenant une même tâche. Pour cela,

- Jouer sur les variables de commandes de la situation
- Jouer sur les procédés de calculs *(algorithmes évolutifs)*

Soyez attentifs aux difficultés non spécifiques aux mathématiques : *(lecture, représentations spatiales, cultures différentes).*

Les programmes 2016 nous y incitent. Il sont seuls force de loi.

Enfin, le suivi d'un manuel sans jamais de mises en scène en classe installe les élèves dans une relation défaillante aux mathématiques

Merci de m'avoir écouté et…

Bon courage pour la suite.