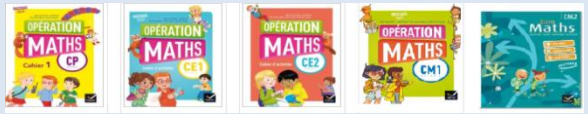
Place et rôle de la manipulation dans la construction du nombre et la résolution de problèmes aux cycle 1, 2 et 3.

Joël Briand

ddm.joel.briand.free.fr

BORDEAUX

Equipe « Opération maths-Euromaths ».



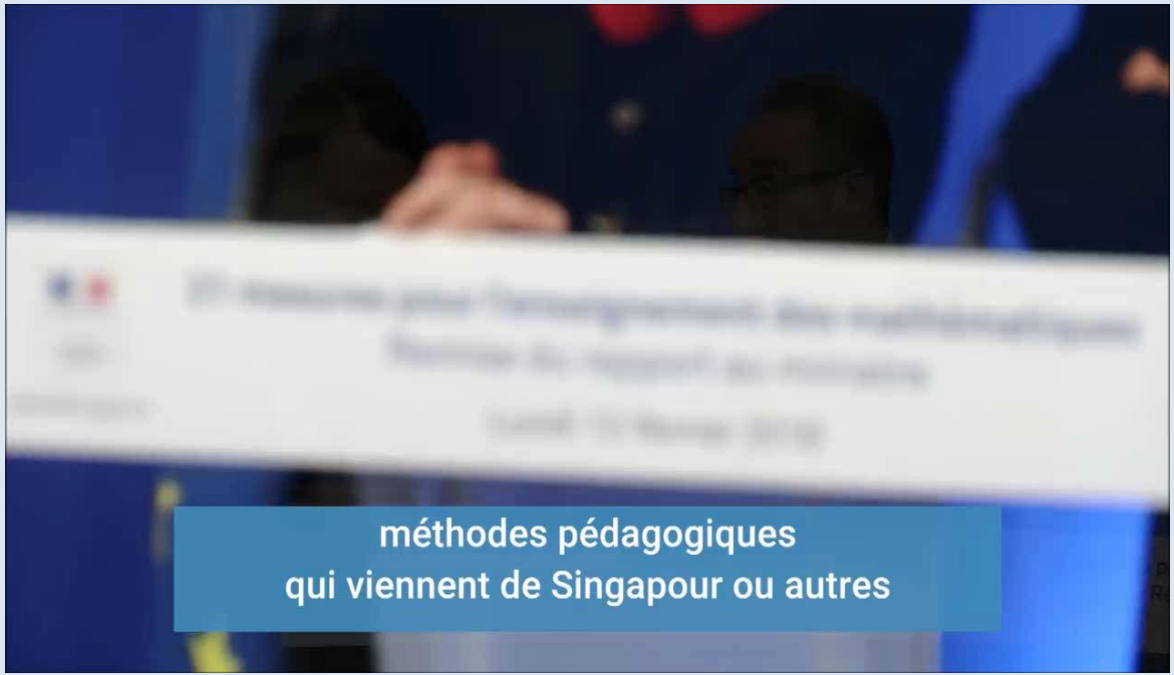
opération.maths.free.fr

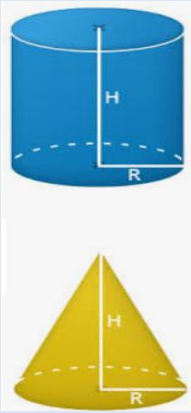
Plan

- Première partie : Qu'est ce que « faire des mathématiques »?
- Deuxième partie : Quelques mises au point
- Troisième partie : Construction des premiers nombres
- Quatrième partie La numération
- Cinquième partie Concilier activité mathématiques et acquisition des opérations : les algorithmes évolutifs
- Sixième partie Un point aveugle dans l'enseignement : la droite numérique
- Septième partie Les problèmes à énoncés textuels
- Conclusions.

En guise d’introduction

Un extrait vidéo saisi lors de la présentation du rapport Villani-Torossian





Que nous apprend cet extrait ?

- Que manipuler est ludique ?
- Qu'il suffit d'observer pour démontrer ?
- Que les mathématiques se construisent sans langage ?
- Qu'il n'est donc pas nécessaire de s'embarrasser de formules ?

- Ce que l’on attend du professeur après cette « expérience »

- *« Vous voyez que le volume d’un cône semble être le tiers de celui d’un cylindre de même diamètre et de même hauteur. Plus tard, vous construirez des outils mathématiques vous permettant d’être sûrs que cela est vrai… ou faux».*

Pour mieux se comprendre
Deux activités comparées en CP

L'illusion entretenue de la même séquence de classe parce que le même écrit est affiché.
Mais deux formes radicalement différentes de rapport au savoir.
Deux formes différentes de rapport à l'écrit .
Même milieu de référence ; milieu d'apprentissage différent.

- Dans cet exemple la réponse à « combien il y en a dans la boîte ? » s'élabore en s'appuyant :
- Soit sur une manipulation de type 1 : le matériel permet de comprendre la situation et d'obtenir une réponse.
- Soit sur une manipulation de type 2 : le matériel permet de comprendre la situation (éventuellement en simulant avec une manipulation de type 1) ; un travail de prévision est mis en place ; la vérification des prévisions s'effectue soit de façon pragmatique (on vérifie à l'aide du matériel) soit de façon syntaxique (on vérifie en s'appuyant sur des savoirs, des théorèmes).
- Le matériel n'y joue donc pas les mêmes rôles.
- Seule la manipulation de type 2 engage à coup sûr une activité mathématique.

En formation, faire le lien avec un manuel

Le travail avec les objets

L'évocation à l'aide d'images et de textes

L'écriture formelle

Manipuler, expérimenter : tout sauf le bricolage. Dès la petite section

- Une activité connue... : trier des objets

- Deux connaissances (faiblement) convoquées : collection et énumération : elles sont constitutives du savoir « tri ».
- Connaissances contrôlées à l'insu des élèves par le dispositif matériel. (Manipulation de type 1).

- Trier avec des boîtes tirelires

- Pourquoi « compliquer » la situation ?

Le « milieu » détermine l'activité.

- Milieu matériel « faux ami »
- Milieu matériel antagoniste : de vrais enjeux
- (Manipulation de type 2).

Document 2 000

Alors, qu'est-ce que faire des mathématiques ?

- Mathématiser c'est construire un modèle (produit par un langage : i.e. « moyen d'objectiver et de développer la pensée. ») en vue d'exercer un contrôle sur un milieu (souvent matériel en début de scolarité).
- La manipulation : sa place, son rôle
- Prévoir puis vérifier.
- Ceci dès la petite section de l'école maternelle
- Notre métier consiste à rendre compatible cette activité intellectuelle formatrice et l'acquisition des savoirs des programmes de l'école.

En cycle 3

L’introduction de la somme de deux décimaux en écriture à virgule

Antécédents :

Les écritures à virgule ont été introduites à partir des fractions décimales

3 scénarios…

Joël Briand 6 novembre 2019

- *Scénario 1 :* Le professeur explique la technique de l'addition en s'appuyant sur les savoirs des fractions. Il fait ensuit le lien entre savoirs faire anciens et nouveaux (addition en colonne).

- *Scénario 2* : Par groupe : deux baguettes de longueurs connues et affichées : 1,45m et 2,7m. Consigne : « Je vous demande de trouver la longueur de la baguette obtenue en mettant ces deux baguettes bout à bout ». Les élèves disposent de mètres. Ils mesurent et trouvent la longueur totale. Synthèse collective.

- *Scénario 3 :* Dans la classe, deux baguettes de longueurs connues et affichées: 1,45m et 2,7m. Consigne : « Prévoyez, par le calcul, la longueur de la baguette obtenue lorsque l'on mettra ces deux bout à bout ». Les élèves prévoient. Les prévisions sont vérifiées par le mesurage.

Ce qui caractérise ces situations

	Situation 1	Situation 2	Situation 3
Problème posé	non	Oui (à partir d'un matériel)	Oui (à partir d'un matériel)
Action de l'élève	imiter	Mesurer. Aucune anticipation organisée.	Prévoir un résultat puis repérer les erreurs par validation pragmatique ou/et syntaxique
Transfert de responsabilité (preuve démonstration)	Non (ou maïeutique) Démonstration locale par le professeur	Oui (mesurer)	Oui (prévoir puis mesurer) Démonstration locale éventuelle par élèves et preuve par matériel.
Nature de la tâche	Technique : addition des fractions puis addition en colonne Technologie : validation syntaxique	Technique : Mesurage de bandes mises bout à bout. Technologie : utilisation du mètre à ruban	Technique : recours aux fractions Technologie : validation syntaxique et utilisation du mètre à ruban

Manipulations : type 1 type 2

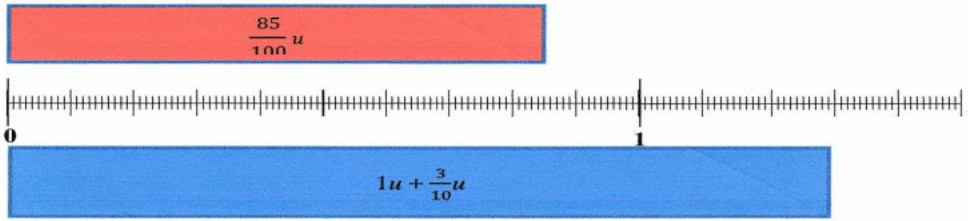
En 6°….le moment de vérification

APMEP atelier octobre 2017 IREM de LYON
(Sophie Roubin, Bruno Rozanes)

BANDES ACCOLEES[1]

DESCRIPTION RAPIDE : On dispose de deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures....

MATERIEL :



- Une demi-droite graduée en centièmes
- Deux bandes respectivement de longueur $1u + \frac{3}{10}u$ et $\frac{85}{100}u$ à projeter ou à construire en grand pour pouvoir être affichées au tableau.

CONSIGNES

1. Vous rangez les bandes et les droites graduées dans une enveloppe. Vous devez prévoir combien mesurerait une bande ayant la même longueur que vos deux bandes mises bout à bout. On les sortira ensuite pour vérifier.

2. Vous devez maintenant essayer de poser l'addition de 1u + 3/10 u et de 85/100 u. (Cela doit vous permettre de retrouver le résultat précédent.) Vous travaillerez d'abord seuls puis vous vous mettrez d'accord à plusieurs sur une disposition qui vous semble pratique.

Partie 2
Quelques remarques

Manipuler : une prescription sans précautions

- L'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, pour des raisons diverses, s'est de moins en moins appuyé sur des manipulations d'objets pour organiser des activités.
- Or c'est par un appui sur du matériel que les élèves sont motivés, y compris le matériel numérique
- Le merchandising actuel : « méthode de Singapour », « méthode Montessori », etc. profite de la quête légitime de l'épanouissement des élèves pour laisser croire à des méthodes nouvelles qui partent de manipulations en *« sacralisant le bricolage»* et attirer ainsi des enseignants soucieux d'améliorer leur enseignement.
- **Il est donc nécessaire de resituer le rôle des manipulations dans l'activité mathématique.**

Les « effets Jourdain »*

* Réf : travaux de Guy Brousseau. Voir son site : http://guy-brousseau.com/?s=jourdain

Les sciences cognitives

- Elles ne prétendent pas apporter des méthodes d'apprentissage.
- Elles attirent l'attention sur le fait que les mathématiques ne sont pas des constructions arbitraires. Ces mathématiques sont issues de l'évolution de notre cerveau dans un monde qui a des régularités intéressantes (S.Dehanne 2010). (numérique, spatial, probabilités) : protomathématiques.
- A propos du numérique, elles montrent que la correspondance entre nombres et espace est importante pour le développement des compétences numériques.
- Elles suggèrent de réhabiliter les jeux classiques, de recréer des environnements propices au numérique. *Est-ce nouveau ?*

Programmes 2016
6 Compétences travaillées

Le calcul n'est qu'une partie de l'activité mathématique

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer.

Problèmes et situations

Joël Briand 29 octobre 2019
IFE

« Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. »

Jean BRUN, revue *Math-École* n° 141, Institut de mathématiques (Neuchâtel).

- L'idée en vogue qui consiste à se focaliser sur la résolution de problèmes en ne prenant plus comme objet d'étude la construction des séquences d'apprentissages doit être combattue

Les catégories de situations

- Dans la plupart des situations vues en classe, on peut dire que l'apprentissage se fait par **familiarisation** : l'enfant comprend le problème posé par le professeur ou le manuel ou le fichier et s'efforce de résoudre le problème ou de répondre à la question.
- La situation évoquée rapidement en CP est d'une autre nature : Il s'agit de construire des dispositifs adaptés à l'âge, aux connaissances, et aux intérêts des élèves concernés en se posant une question d'ordre didactique et une d'ordre plutôt sociologique :
- « De quels problèmes traités dans ces dispositifs, le savoir visé est-il la solution optimale ? »
- « Comment s'assurer que les élèves voient dans ces activités des occasions d'apprendre ? »
- Brousseau, dans la théorie des situations (TSD) nomme ces situations : « situations d'apprentissage par **adaptation. »**

Des problèmes aux situations d'apprentissage par adaptation

Il s'agit de construire des dispositifs adaptés à l'âge, aux connaissances, et aux intérêts des élèves concernés et qui abordent plusieurs types d'enjeux :

Enjeux de savoirs : Construire des milieux à enjeux dans lesquels le savoir visé est la solution optimale au problème posé. Les enfants y progressent. Ils peuvent se rendre compte par eux-mêmes de leurs erreurs.

Or : « plus les élèves sont en difficulté plus on les plonge dans du déjà fait, du déjà vu, de l'entraînement. » rapport sur l'individualisation (CNESCO sep 2016**) :**http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2016/09/160926-Inegalites-scolaires.pdf

Enjeux langagiers : la production de signes permet de concevoir un monde, de décontextualiser, de dépersonnaliser. (cf : la secondarisation).

Enjeux sociaux : à un moment donné, l'élève aura à écouter, à lire l'autre.

Enjeux éthiques : engagés dans une telle situation, les élèves cherchent à savoir, à comprendre et accepter l'action d'autres élèves.

Caractéristiques d'une situation d'apprentissage par adaptation

- **Y a-t-il bien un problème posé aux élèves ou ont-ils seulement à appliquer une consigne?**
- **L'utilisation de la connaissance est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves?**
- **L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée?**
- **Comment voit-il qu'il a réussi ou échoué? (Est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions interprétables par l'élève?)**
- **La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir?**
- **L'organisation de la situation permet-elle à chaque enfant d'être confronté au problème et de faire des tentatives ? L'échange et la confrontation des points de vue ?**

Pourquoi cette approche reste difficile à faire partager ?

- Le système,
  - La succession des programmes : l'étude des fluctuations des programmes 2002, 2008, 2016 en mathématiques met en évidence des tensions, des conflits dont la nature dépasse les seuls enjeux mathématiques.
- Le professeur :
  - Peu d'outils pour mettre en scène des situations d'apprentissage par adaptation au sein d'une progression
  - L'idée que ce type d'approche serait réservé à une élite. D'où une « pédagogie spontanée » qui consiste à préconiser les tâches de manipulation (de type 1) pour les élèves étiquetés en difficulté, et à enseigner des procédés.
  - L'idée de ne pas ennuyer les élèves donc de faire un peu de tout chaque jour, donc de renoncer à une « ouverture de chantier »
  - Difficulté personnelles liées aux mathématiques à enseigner *(l'exemple de la soustraction, des décimaux).*

PARTIE 3
Conditions pour la construction des premiers nombres

Joël Briand 6 novembre 2019

Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.

Légende :
Situation d'action
Exemple de Jeu
savoir

1-faire un inventaire
jeu des allumettes.
Énumération

Maîtriser des environnements numériques simples
jeux de plateaux, jeux de cartes
Lien entre spatial et quantité, lectures variées, objets, doigts

2A-Entrer dans l'écrit pour contrôler une quantité
Situations S1 S2 S3
Réaliser une collection équipotente à une collection de référence
Comptage numérotage puis Nombre

3- Contrôler une quantité à l'aide d'un système de signes qui engage le concept de l'addition. Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Décomposition, recomposition
Égalité en acte.

Entrer dans l'écrit pour contrôler une collection
Les jeux de listes
Collection, sous collections classification, sériation.

2B -Entrer dans l'écrit pour contrôler une position
Les boites en ligne
Rangement : Aspect ordinal

Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.

Légende :
Situation d'action
Exemple de Jeu
savoir

1-faire un inventaire
jeu des allumettes.
Énumération

Maîtriser des environnements numériques simples
jeux de plateaux, jeux de cartes
Lien entre spatial et quantité, lectures variées, objets, doigts

2A-Entrer dans l'écrit pour contrôler une quantité
Situations S1 S2 S3
Réaliser une collection équipotente à une collection de référence
Comptage numérotage puis Nombre

3- Contrôler une quantité à l'aide d'un système de signes qui engage le concept de l'addition. Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Décomposition, recomposition
Égalité en acte.

Entrer dans l'écrit pour contrôler une collection
Les jeux de listes
Collection, sous collections classification, sériation.

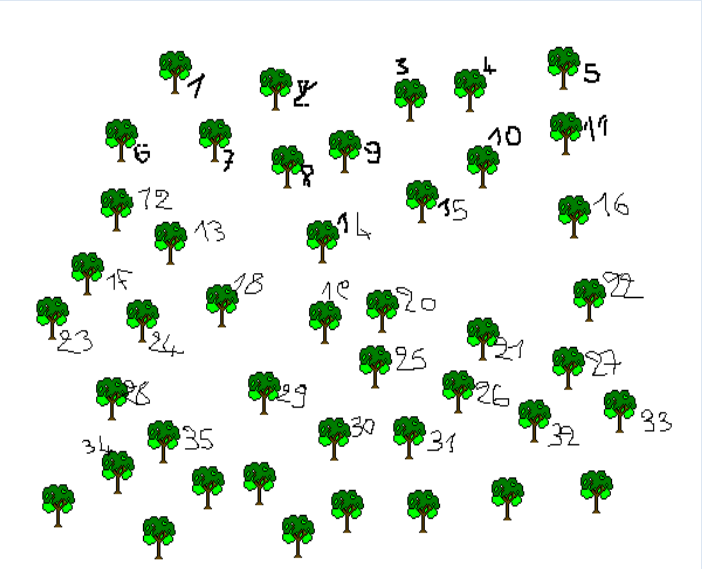
2B -Entrer dans l'écrit pour contrôler une position
Les boites en ligne
Rangement : Aspect ordinal

- Une activité venue d'où ?

Document 2 000

Allons voir en Cours préparatoire

Examinons un travail d’élève de CP



L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (lignes conçues). Il s'agit donc d'une absence de connaissance (que nous appelons *l’énumération*) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche d’effectuer *l’inventaire* de la collection. (1993).

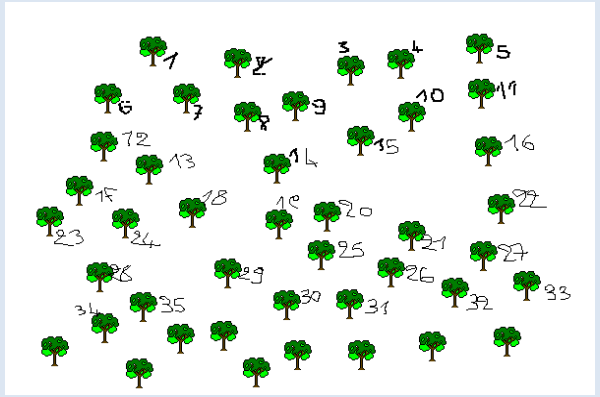
BO n° 22 du 29 mai 2019 page 26.

Compétences nécessaires pour effectuer un comptage

- ***Etre capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.***
- ***Choisir un élément d'une collection.***
- **Enoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).**
- ***Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis***
- ***Concevoir la collection des objets non encore choisis***
- **Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) les quatre points qui précèdent tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.**
- ***Savoir que l'on a choisi le dernier élément.***
- **Enoncer le dernier mot nombre.**

> ***« Dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris. »***

La classe au jour le jour : faire évoluer la situation
Boîtes fixées…écrire est la seule solution



Enumération

Dénombrement
(donc énumération)

Sourions un peu aux défauts d'énumération

Variante avec « milieu » objectif différent

Voir « des situations pour apprendre le nombre »
CRDP Champagne Ardenne.

Une rédaction approximative

Note de service du 29 mai 2019 relative aux mathématiques à l'école maternelle.

« l'enfant doit maîtriser la synchronisation du pointage des éléments de la collection avec la récitation des noms des nombres et apprendre à énumérer tous les éléments de la collection (pointer une et une seule fois, sans en oublier). Cette compétence d'énumération s'acquiert dans l'action, en dénombrant activement, et il est déterminant de concevoir, et proposer aux élèves, des situations permettant des manipulations nombreuses et variées, en prenant le temps nécessaire chaque jour et dans la continuité du cycle 1. »

Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.

Légende :
Situation d'action
Exemple de Jeu
savoir

1-faire un inventaire
jeu des allumettes.
Énumération

Maîtriser des environnements numériques simples
jeux de plateaux, jeux de cartes
Lien entre spatial et quantité, lectures variées, objets, doigts

2A-Entrer dans l'écrit pour contrôler une quantité
Situations S1 S2 S3
Réaliser une collection équipotente à une collection de référence
Comptage numérotage puis nombre

3- Contrôler une quantité à l'aide d'un système de signes qui engage le concept de l'addition. Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Décomposition, recomposition
Égalité en acte.

Entrer dans l'écrit pour contrôler une collection
Les jeux de listes
Collection, sous collections classification, sériation.

2B -Entrer dans l'écrit pour contrôler une position
Les boites en ligne
Rangement : Aspect ordinal

Dénombrement

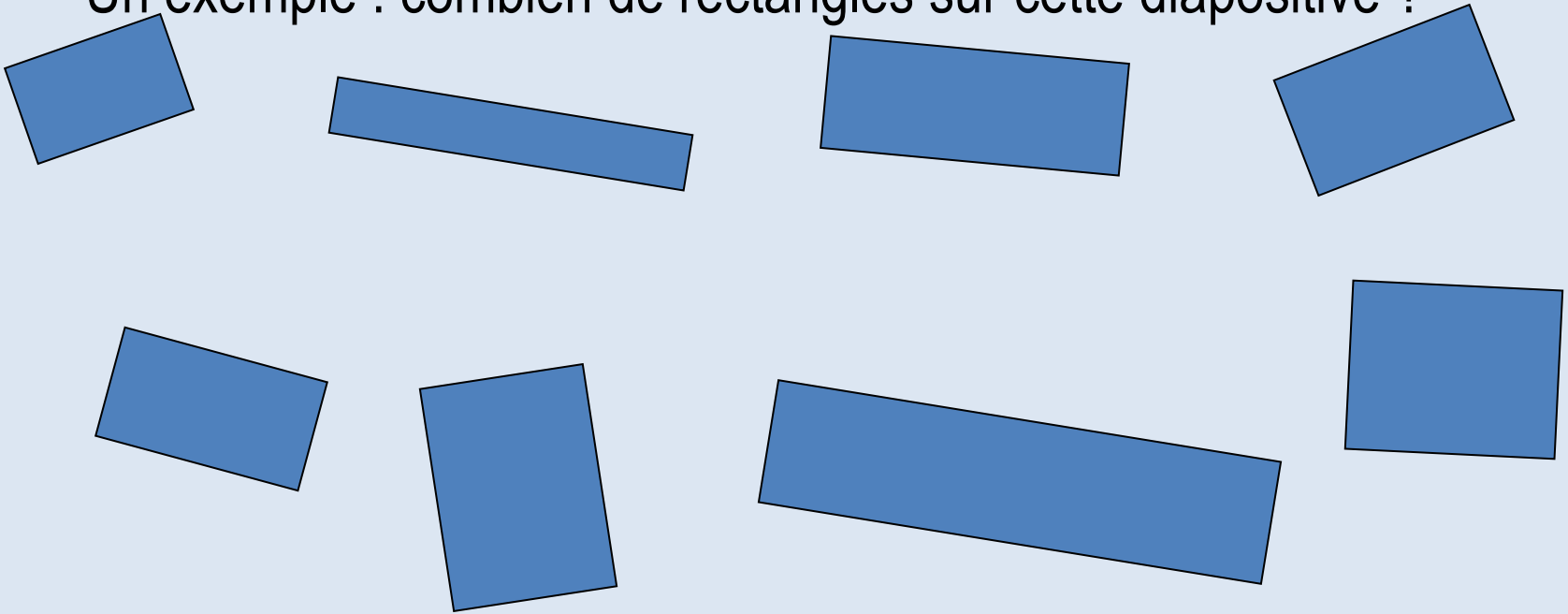
- DENOMBREMENT
- C’est la capacité à produire une collection (C2) équipotente à une collection donnée (C1) sans voir cette collection au moment où l'on produit la collection (C2).

- COMMENT DENOMBRER ?
- Par subitizing,
- En comptant, numérotant
- Ou les deux et en s’aidant d’images mentales.
- Ou en ayant maîtrisé le nombre.

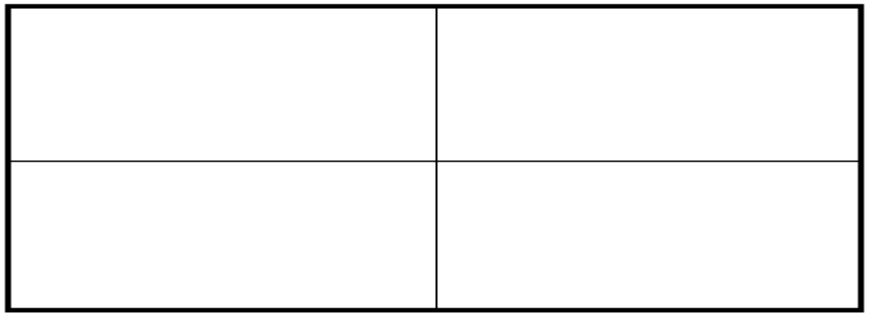
.

Contrôler une collection pour dénombrer : une activité simple ?

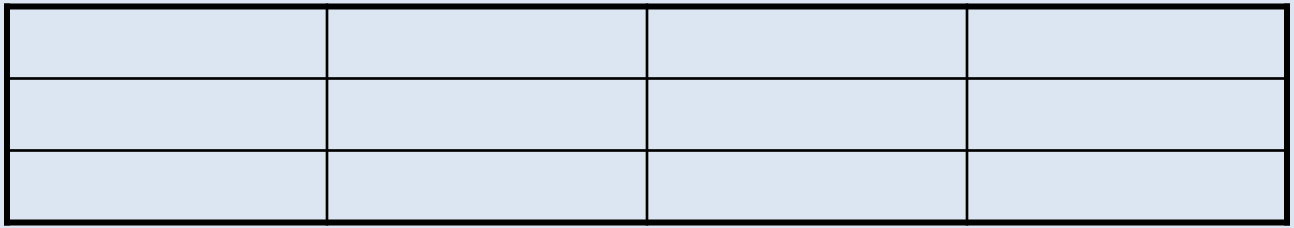
Un exemple : combien de rectangles sur cette diapositive ?



Combien de rectangles dans cette figure?



Et dans celle-ci?...



$C_5^2 \times C_4^2$

Connaissances spatiales,
conceptions des objets à dénombrer,
outillage mathématique expert.

Nombre et numération

- L’acquisition du concept de nombre et l’étude de la « numération » sont bien sûr imbriquées mais ne relèvent pas des mêmes types de tâches car ces deux objets ne sont pas de même nature.
- Le nombre se définit comme propriété commune à diverses collections d’objets et prend son sens par les fonctions qu’il assure.
- Mais naturellement il doit être « dit » ou « écrit » et donc se pose la question de la manière de le « désigner ».
- Les numérations sont les systèmes organisés de codage des nombres.
- Il s’agit alors de penser la construction de la numération comme un « produit dérivé » de l’entrée dans une forme d’écrit.

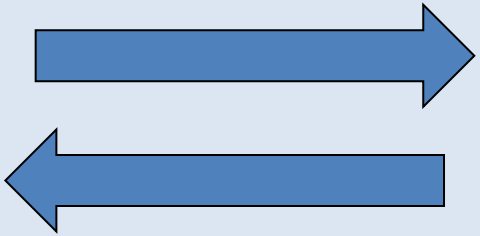
La construction des premiers nombres

- Le comptage-numérotage est une pratique spontanée,
- On peut observer cette pratique comme procédure réussie de dénombrement,
- Sa manifestation ne garantit pas l'acquisition du concept de nombre.
- Elle ne signifie pas non plus que le concept de nombre n'est pas acquis !

- Comment alors faire évoluer un milieu d'apprentissage afin de passer du comptage-numérotage observé au nombre construit opérationnel.
- Nous allons voir que l'entrée dans le monde des signes joue ici un rôle déterminant.

Une situation emblématique et bien souvent mal comprise en formation…et ailleurs

[S1]. « *Nous allons jouer au jeu des voitures… ».* *Autocommunication orale.*



Vu dans un fichier largement diffusé en France… : « Eloigner les deux collections à comparer pour les élèves les plus performants » (!)

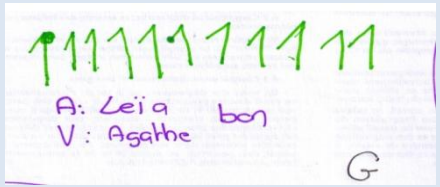
Faire évoluer la situation pour s'assurer de l'abandon du comptage-numérotage

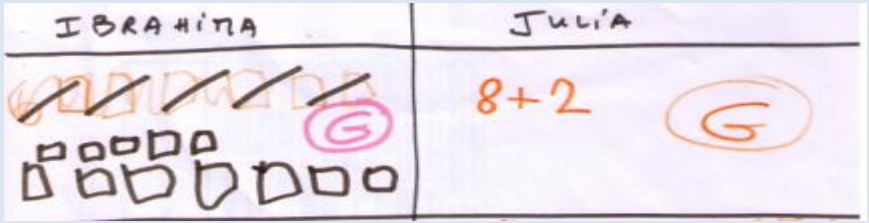
[S2]. ***« Les garages seront pris plus tard. Vous n'aurez plus les voitures. Pour vous souvenir, vous pourrez écrire ». Autocommunication écrite.***

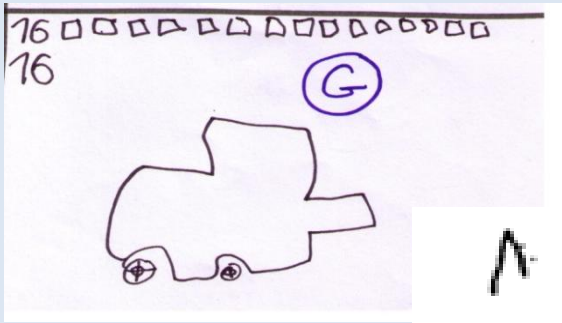
[S3]. ***« Ce n'est plus vous qui irez chercher les garages ; vous porterez votre message qui sera lu par un camarade. Il vous donnera les garages ». Communication écrite.***

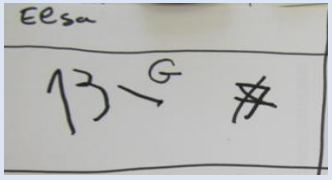
- Le milieu d'apprentissage est modifié afin de faire conceptualiser le nombre par passage à l'écrit,.

Quelques messages MS-GS









Documents 2 014

L'évolution des traces écrites est un indice de l'acquisition de la maîtrise des premiers nombres. C'est un chantier de plusieurs semaines qui s'ouvre.

Construction des premiers nombres : approche plurielle, rôles de l'écrit.

Légende :
Situation d'action
Exemple de Jeu
savoir

1-faire un inventaire
jeu des allumettes.
Énumération

Maîtriser des environnements numériques simples
jeux de plateaux, jeux de cartes
Lien entre spatial et quantité, lectures variées, objets, doigts

2A-Entrer dans l'écrit pour contrôler une quantité
Situations S1 S2 S3
Réaliser une collection équipotente à une collection de référence
Comptage numérotage puis nombre

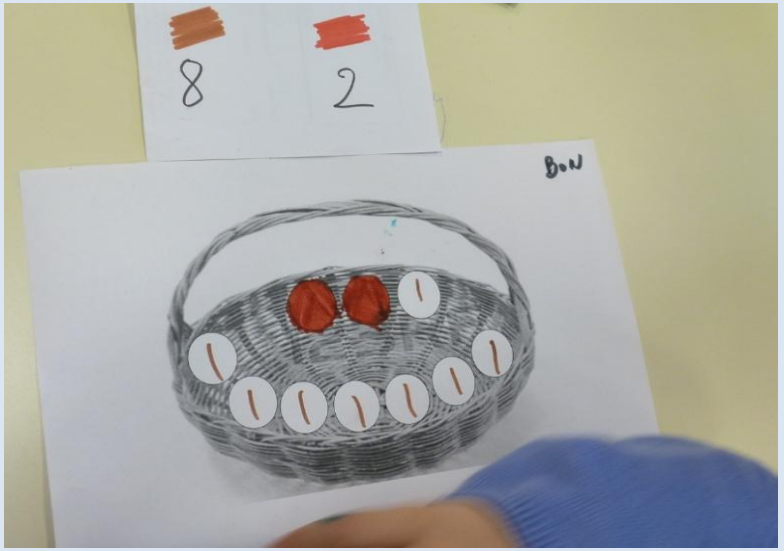
3- Contrôler une quantité à l'aide d'un système de signes qui engage le concept de l'addition. Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Lecture et interprétation de messages écrits additifs
Décomposition, recomposition
Égalité en acte.

Entrer dans l'écrit pour contrôler une collection
Les jeux de listes
Collection, sous collections classification, sériation.

2B -Entrer dans l'écrit pour contrôler une position
Les boites en ligne
Rangement : Aspect ordinal

Une situation

Document 1995



Document 2016

- **Cette situation S1 permet de progresser d'une signification « topographique » du signe 4 5 à une signification « mesure d'une quantité »**

La suite…

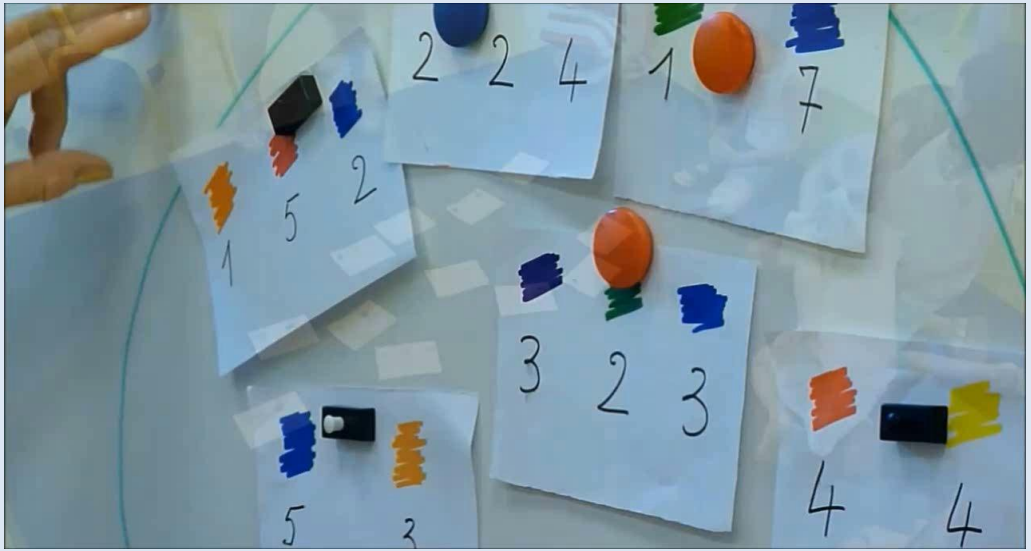
- **S2 : Savoir aller chercher les bons paniers en faisant le lien entre 4 5 et 9**

(C'est un milieu de signes avec validation en milieu matériel ou doigts de la main)

Document 1 995

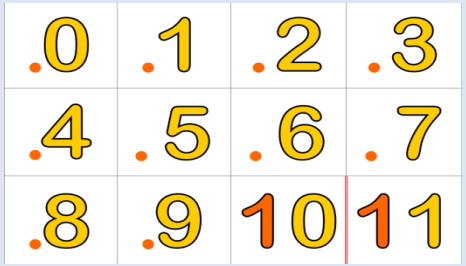
- **S31 : Prévoir si deux étiquettes amènent au même panier (vérification à l'aide des barquettes : validation sémantique)**
- **S32 : Prévoir si deux étiquettes amènent au même panier (cette fois sans recours aux barquettes : validation syntaxique) *(vidéo).***

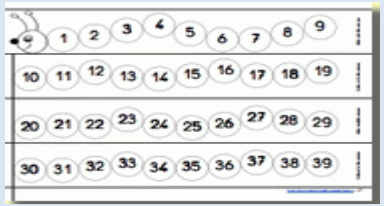
- ***« La reconnaissance de la propriété d'addition est une condition nécessaire à la conceptualisation du nombre. » G.Vergnaud.***
- ***Décomposer recomposer sont des actions solutions.***



Document 2016

A propos d'activités rituelles





Elles sont souvent porteuses de sur-informations dont il faut étudier les effets :

-Existence du « 0 »…

-Chiffre des dizaines de couleur différente, *comme si cela permettait la construction de la numération*,

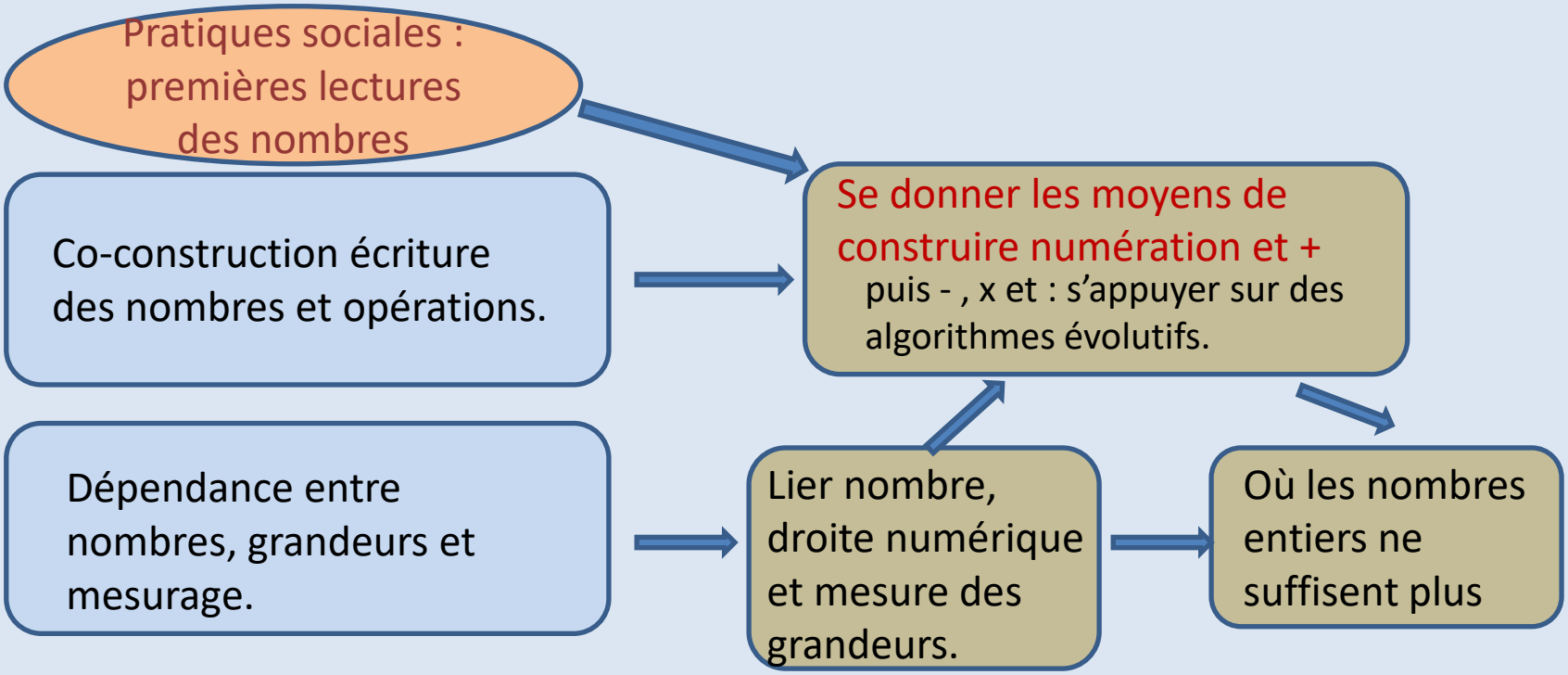
- « enrichie » de jeux de doigts, dominos, etc. *(nous y reviendrons)*

- ou présentées sous forme de tableaux sans signification,

- etc.

Partie 4
La numération

Joël Briand 6 novembre 2019



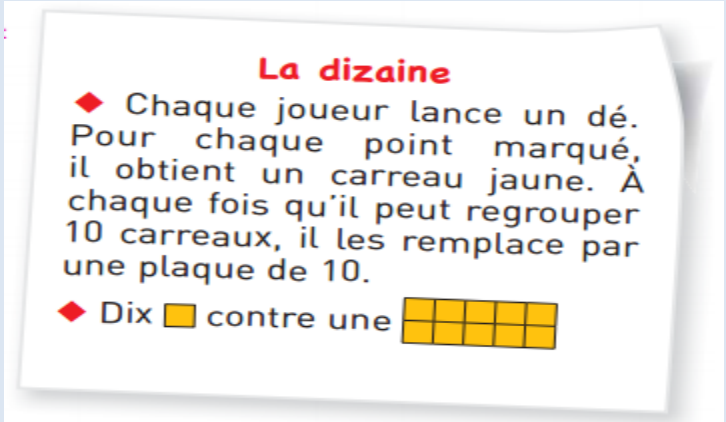
L'écrit se complexifie : la numération, l'addition

Accès à la numération
Les «principes organisateurs» déterminants

- Il est classique de voir un élève lire l'étiquette « 18 » en énonçant « dix-huit » et considérer simultanément que 18 c'est 1 + 8 (donc c'est 9 !) sans voir l'incompatibilité entre ces deux lectures.
- On constate donc que ce signe « 18 » a une signification pour l'élève qui n'est pas « stable »
- Pour que l'élève s'approprie la signification souhaitée de ce « signe », un discours magistral n'est pas suffisant.
- Objectif construire des situations qui permettent cette appropriation et accompagne ce changement d'interprétation des signes également connus « 1 » et « 8 ».

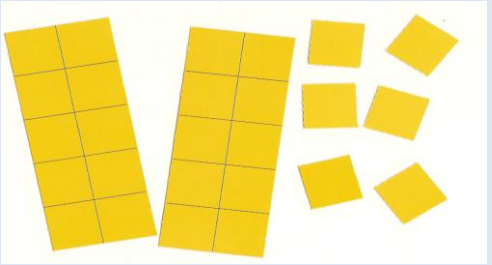
Extraits de cette situation d'évaluation

Première phase
(Jeu de la dizaine)



Pour calculer ce score, les élèves peuvent utiliser plusieurs niveaux de procédures :

- Compter une par une chaque case jaune
- Compter les plaques de 10 (en disant : « dix, vingt ») puis compter un par un les cases jaunes
- Compter les dizaines en disant 1, 2 puis compter un par un les cases jaunes
- Utiliser directement la symbolisation 20+ 6 = 26

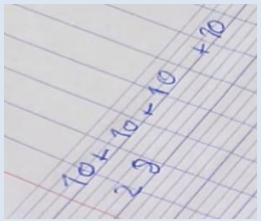


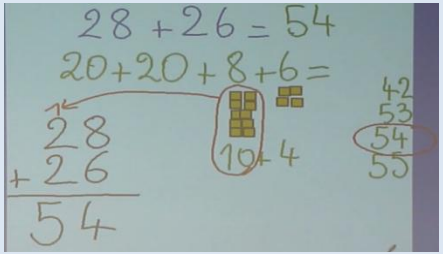
Donc faire évoluer le matériel

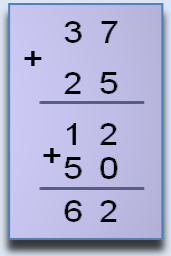
Le comptage un par un de toutes les cases jaunes n'est plus possible. Le but à terme est que les élèves « lisent » ce matériel « 3 dizaines et 4 unités donc 34 »

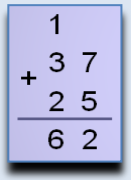
Construction conjointe de la numération et de procédés évolutifs de calculs

« Les opérations arithmétiques sont introduites dans le cadre de la résolution de problèmes dont elles sont un outil de modélisation. »



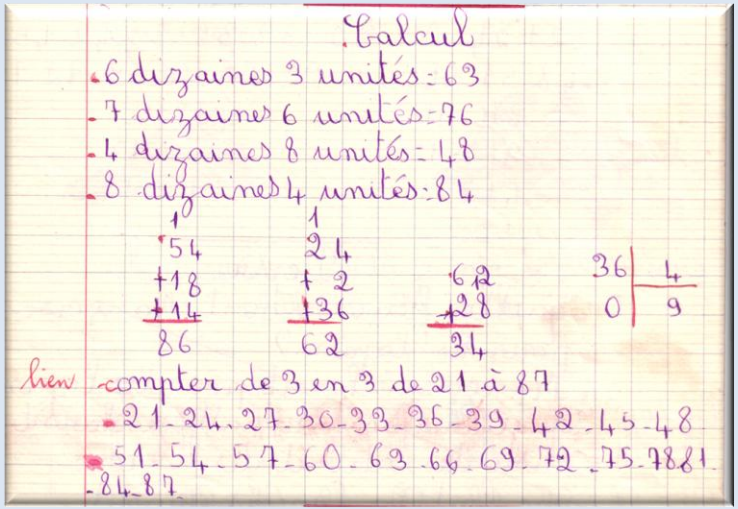






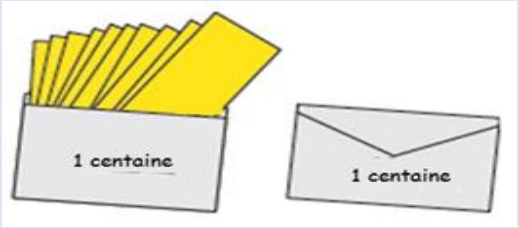
Les effets d'annonces ministérielles : « les 4 opérations dès le CP »

- L'exemple de la division : Au CP, partages équitables simples.
- Enseigner la division au CE1 (nombres inférieurs à 100) consiste avant tout à proposer des situations fondées sur des partages équitables de collections et sur des multiplications à trous simples. (2 et 5).
- Attention aux effets d'annonce…



Ceci n'est pas une division

En CE1 extension du champ numérique : la centaine



Un exemple en CE1:

Le jeu de la centaine

1 centaine, c'est 10 dizaines

c'est 100 unités

100 + 10 + 10 + 4

1 centaine, 2 dizaines et 3 unités

124

Mais aussi

2 dizaines, 1 centaine et 3 unités

12 dizaines et 3 unités

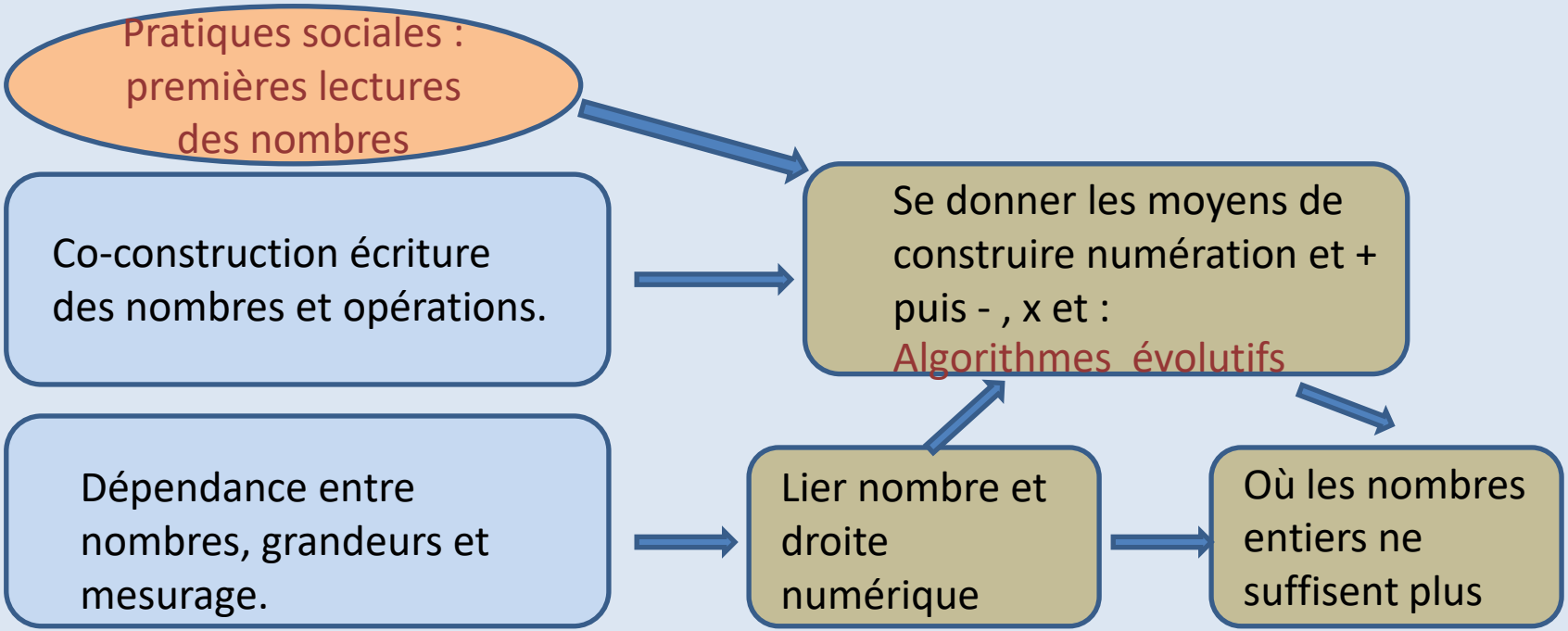
Le tableau de numération: un outil

centaines	dizaines	Unités
		245
	24	5
2	4	5

Partie 5

Concilier apprentissages des opérations arithmétiques et activité mathématique.
(les algorithmes évolutifs)

Joël Briand 6 novembre 2019



« Le sens et l'automatisation se construisent simultanément » (Programmes 2016.)

125-97.

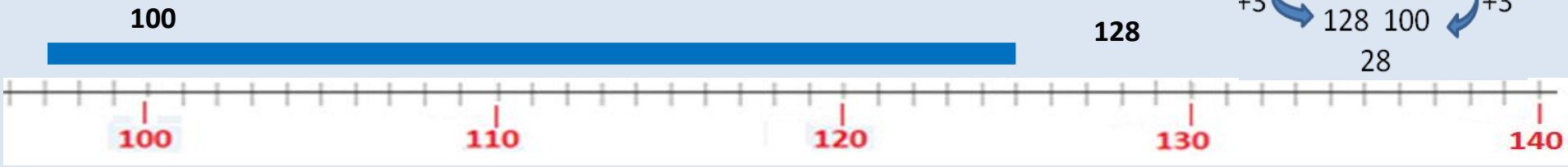
Les techniques

- **La technique par « démolition »**
- exemple 125-97

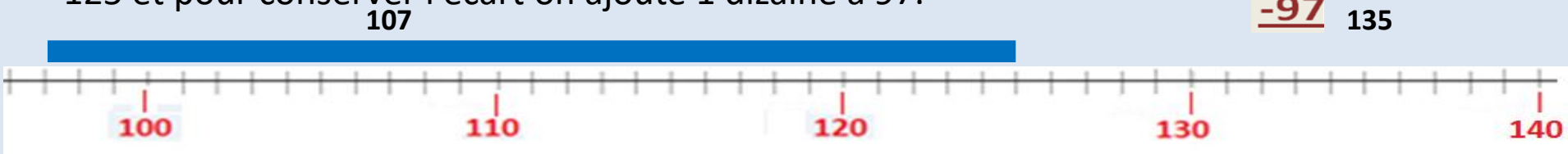
- **Avantage** : cette technique repose sur la compréhension de notre système d'écriture des nombres largement travaillé au cycle 2.
- **Inconvénients** :
- -Elle correspond à une manipulation à partir du matériel de numération…
- -Elle est très difficilement utilisable dans les cas où il y a un zéro intermédiaire sauf à automatiser de façon très coûteuse.
- -Cette technique devra donc être abandonnée en cycle 3 ou au collège.

La technique « par compensation ou translation » : exemple 125-97

Méthode « à la russe » : on cherche un nombre rond



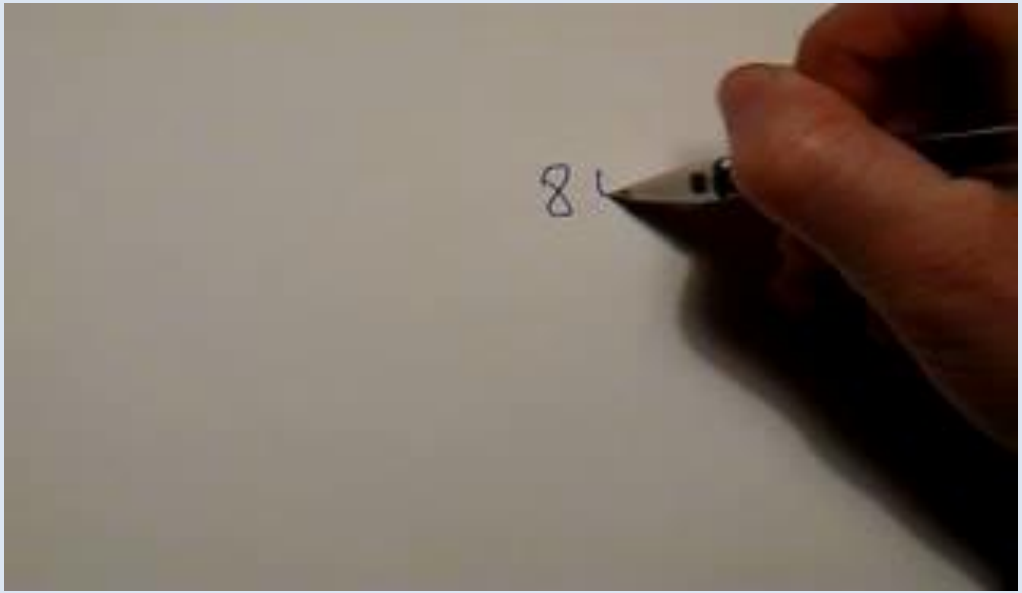
- Méthode usuelle : on ne peut pas calculer 5-7 : on ajoute 1 dizaine à 125 et pour conserver l'écart on ajoute 1 dizaine à 97.



avantages : cette technique est utilisable quels que soient les nombres choisis. Elle s'appuie sur des propriétés mathématiques qui seront utiles au cycle 3 et au collège. C'est la technique usuelle de la soustraction en France, elle sera enseignée au cycle 3. Les élèves qui l'auront apprise en CE1 n'auront pas besoin de changer de technique au cycle 3.

inconvénient : elle nécessite de prendre le temps de travailler la propriété de conservation des écarts, sur laquelle elle repose.

L’algorithme de la soustraction en CE1 se construit donc à partir d’une bonne connaissance de la droite graduée.

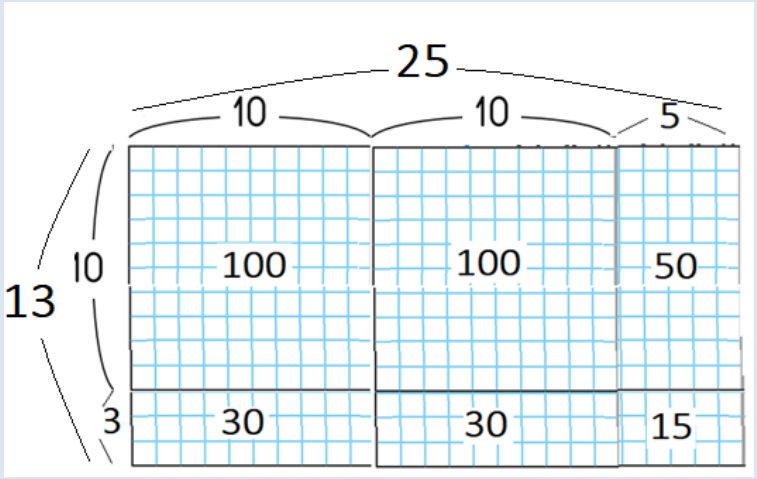


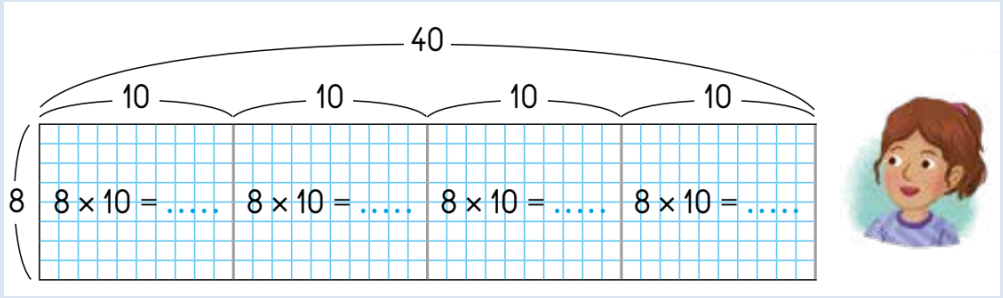
Technique définitive

La multiplication

Joël Briand 6 novembre 2019

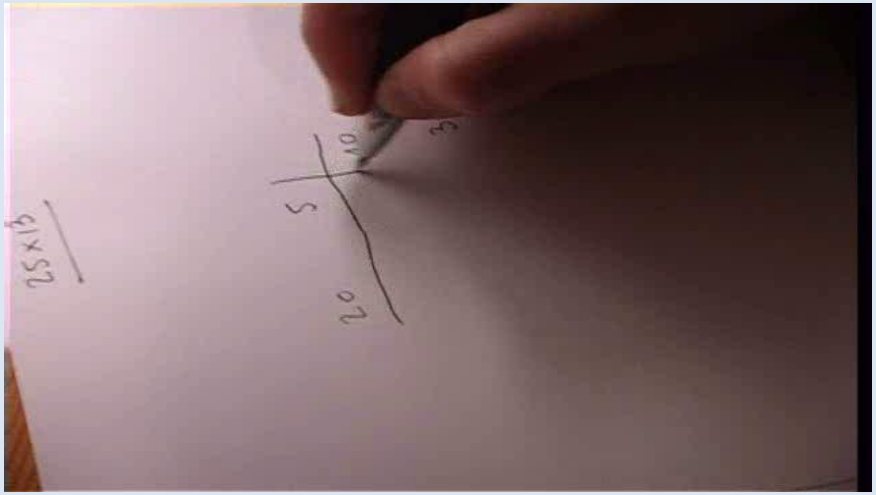
La multiplication en partant d'un quadrillage

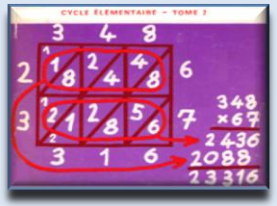




Le procédé

25x13



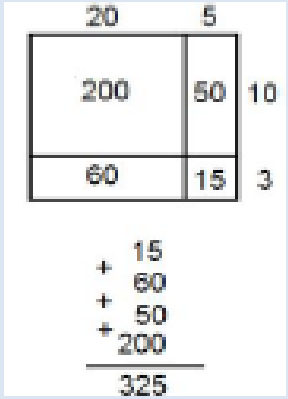


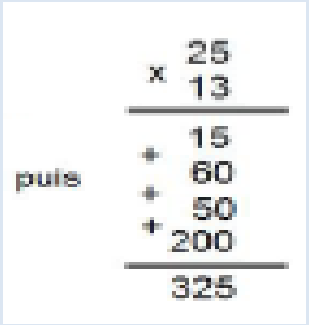
Au seuil de réussite acceptable de 70%, pour la taille 8, la méthode classique permet 12 réussites sur 25 élèves soit 48%. L'autre méthode permet la réussite de 22 élèves soit 88%. Le gain est de 40%. Il augmente avec la taille des multiplications.

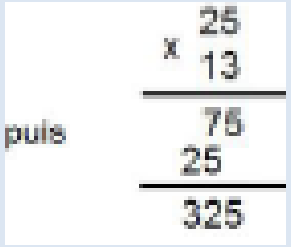
L'amélioration est plus forte chez les élèves moyens.

Recherche réalisée à l'IREM de Bordeaux (1973) auprès de 150 enfants de CM.

Evolution possible adaptée à chaque élève







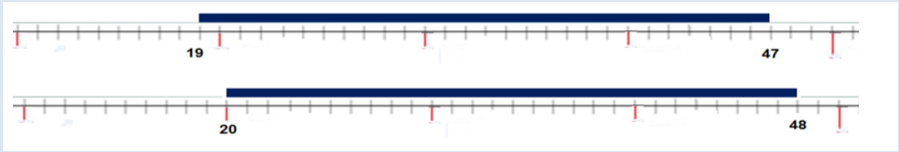
Conclusion : s'appuyer sur des algorithmes évolutifs en cycles 2 et 3.

Addition

$$\begin{array}{r} 37 \\ +\ 25 \\ \hline 12 \\ +50 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +\ 25 \\ \hline 62 \end{array}$$

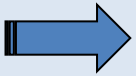
Soustraction



47 c'est 48

\- -

19 20

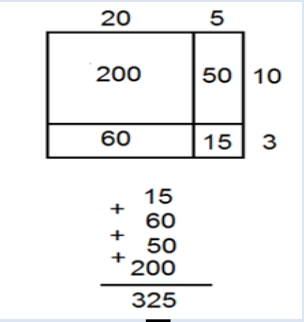


41 10+7

\-

1+1 9

Multiplication



puis, plus tard

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 13 \\ \hline 15 \\ +\ 60 \\ +\ 50 \\ +\ 200 \\ \hline 325 \end{array}$$

puis

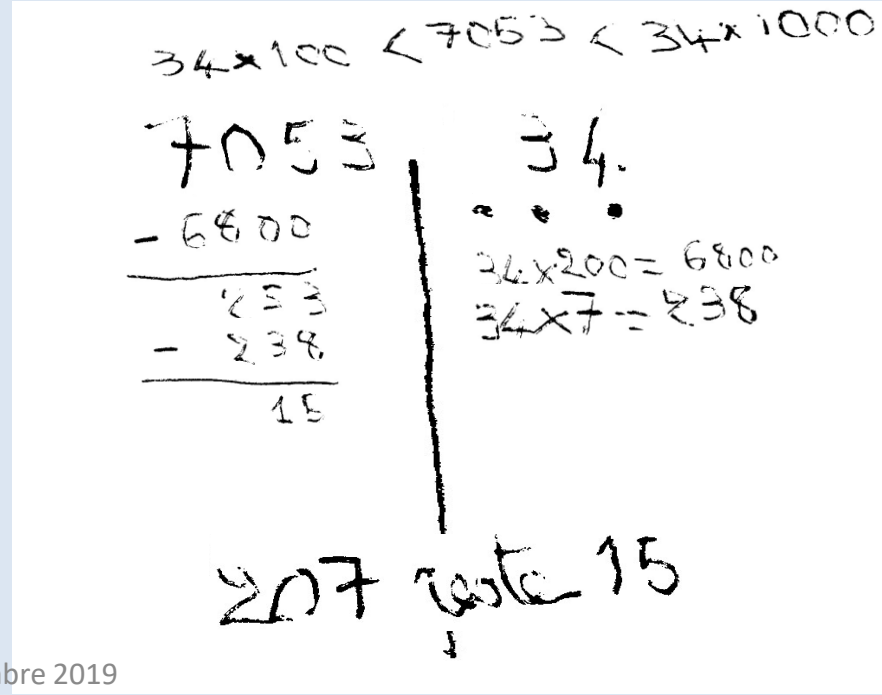
$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ \hline 325 \end{array}$$

La division au CM1.

Un éleveur de volailles veut expédier des œufs par boîtes de 24. Il a 439 œufs. Combien de boîtes doit-il prévoir ?

- **D'abord, contrôle expérimental** des prévisions faites par calcul réfléchi.

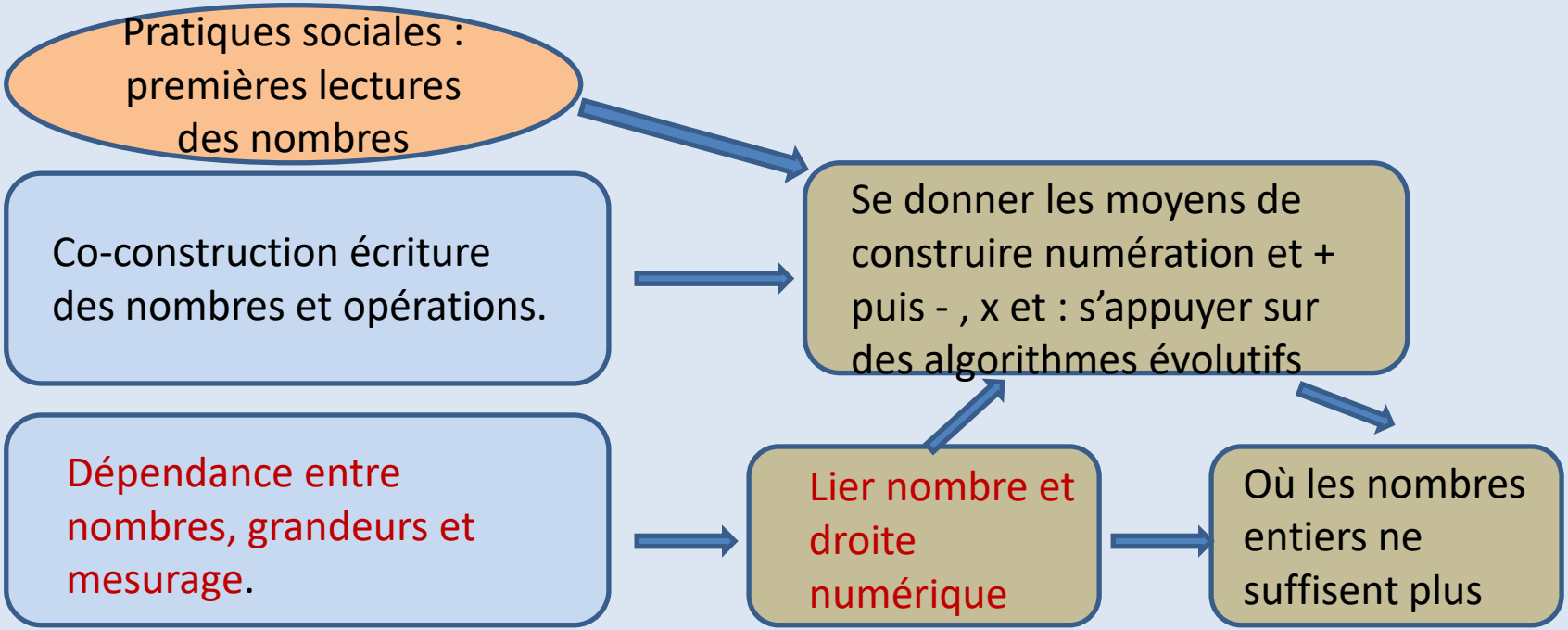
- **plus tard, contrôle par estimation et confiance en le procédé de calcul**. 7053 divisé par 34



Partie 6

la droite numérique,
« point aveugle » dans l'enseignement

Joël Briand 6 novembre 2019

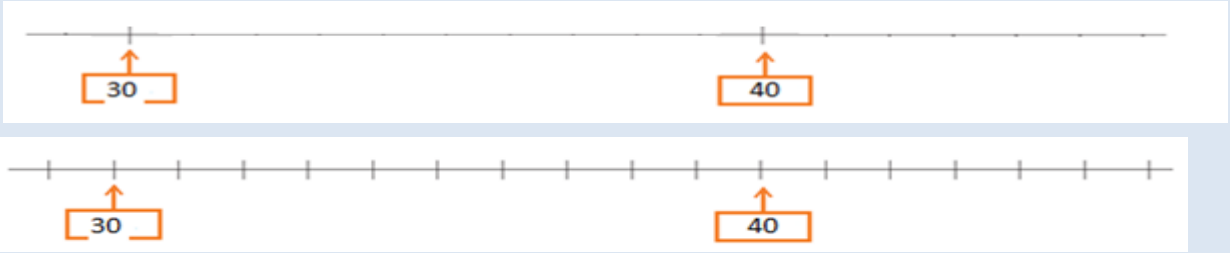


Une image mentale des nombres : file, piste, droite numérique

La droite : outil/objet

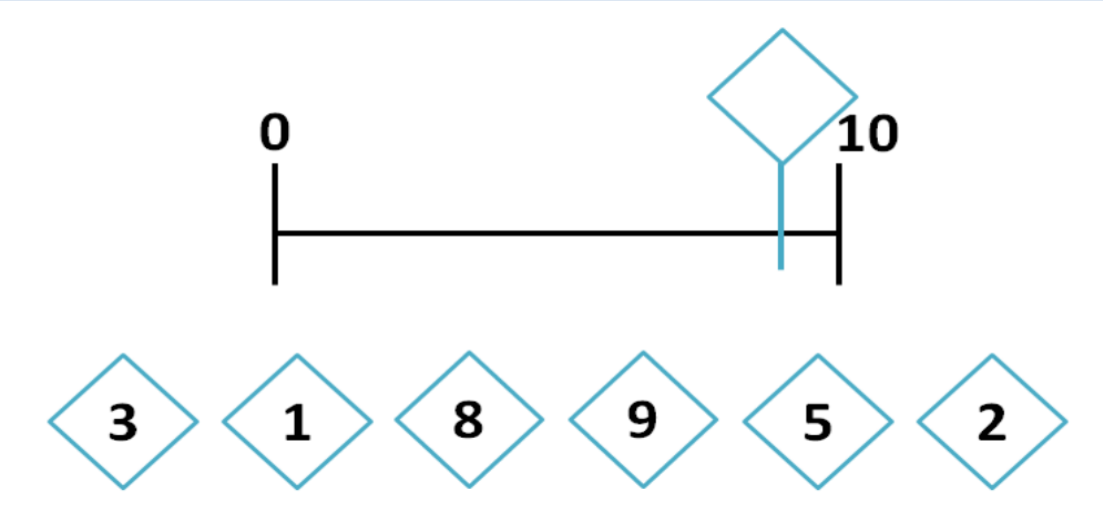
- La droite graduée est un outil très performant pour comparer et ordonner les nombres ainsi que pour mettre en place certaines procédures de calcul, notamment les calculs additifs et soustractifs par sauts et le calcul de division par encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur.
- Ce travail est peu abordé à l'école. Il est souvent confondu avec l'étude du double décimètre et des unités légales de longueur.
- C'est la genèse du système métrique qui devrait faire partie des découvertes des cycles trois et quatre. (lien entre histoire et mathématiques).

Nécessité de construire une image mentale de la droite numérique



- Travailler le lien entre distance (notion géométrique : nombre de graduations) et écart (notion numérique : l'écart 37-15)
- Permet de donner du sens à
  - « 36 est entre 30 et 40 »
  - « 39 est proche de 40 »
  - « 35 est entre 30 et 40. Il est juste au milieu »
  - « 35 est à égale distance de 30 et 40 »
  - Etc.

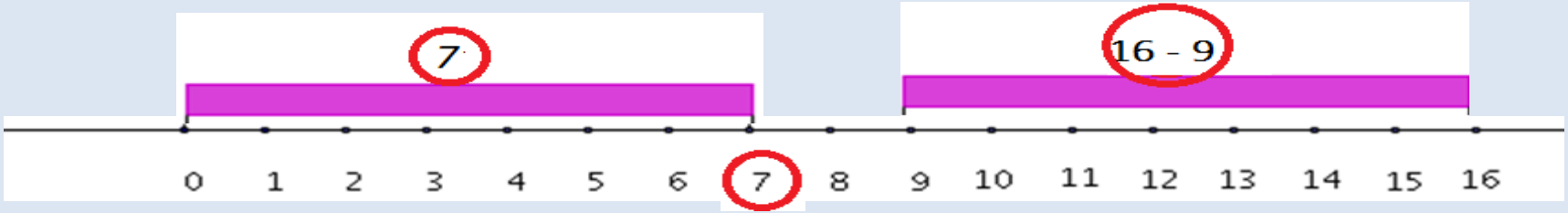
Exercice 6 des repères CP 2018…



Associer nombre, quantité et position sur la piste des nombres

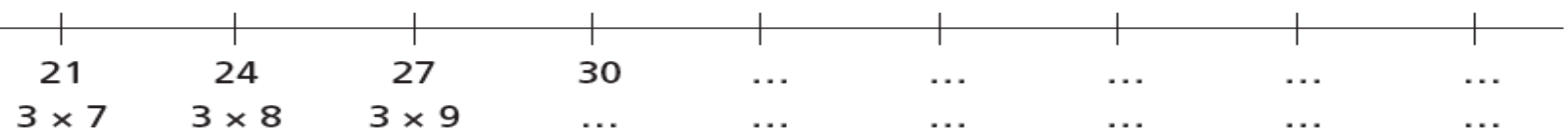
La droite graduée et la mesure (CE2- CM1 – CM2)

Un nombre désigne à la fois un point, la distance de ce point à l'origine, mais aussi la longueur d'une bande.



Droite graduée et multiplication

1



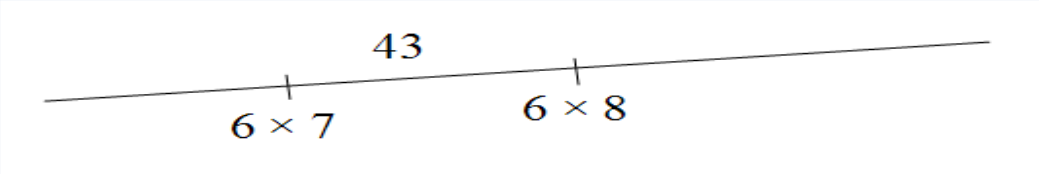
a. Reproduis cette droite graduée de 3 en 3.
Sous chaque graduation, complète avec un nombre et un produit.

b. Place approximativement le nombre 41 sur cette droite.

c. Encadre 41 par deux multiples consécutifs de 3 : $3 \times \ldots < 41 < 3 \times \ldots$

Droite graduée et division

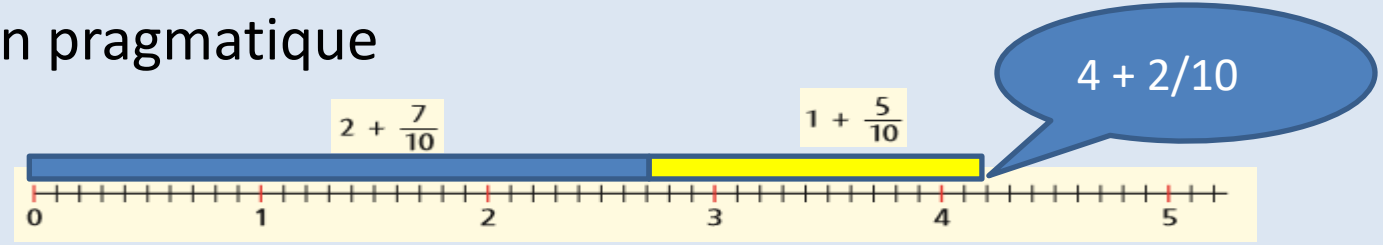
- Résoudre des problèmes en s'appuyant sur la droite numérique :



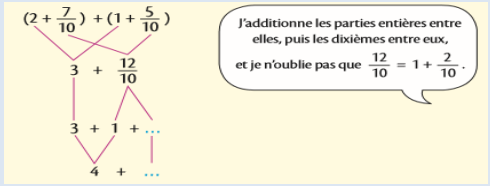
« Quand on encadre 43 par deux multiples consécutifs de 6 et que l'on écrit 43 = (6 x 7) + 1, on dit que l'on fait la division de 43 par 6. Dans cette division, le nombre 7 s'appelle le quotient. C'est le nombre de fois où 6 est contenu dans 43. 1 s'appelle le reste. «

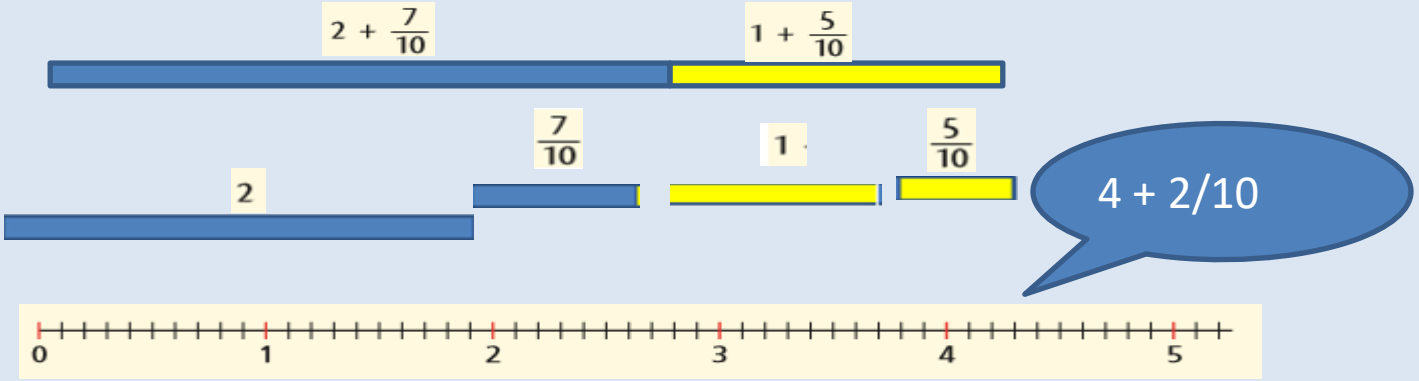
Continuité rupture entre manipulation pour prouver

Validation pragmatique



Validation syntaxique





Partie 7
Les problèmes à énoncé textuel

Les types de problèmes en milieu scolaire

- Problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance (SAA).
- Problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer,
- Problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de savoirs
- Problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général. Pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

Comment faire 50 € avec des billets de 20 €, 10 €, 5 € ?
Trouve au moins quatre solutions.

L’énoncé textuel

- C’est un objet didactique
- C’est un moyen
- Ce n’est pas un objet mathématique

« …caractère stéréotypé des textes de problèmes, dont la fonction essentielle est d'exprimer les différentes applications d'une structure mathématique, plutôt que de présenter des situations réalistes de résolution de problèmes. » Seton Pearla Nesher (1988)

Conseil : pour ce type de situations problèmes qui ne sont pas de l'ordre de l'évaluation

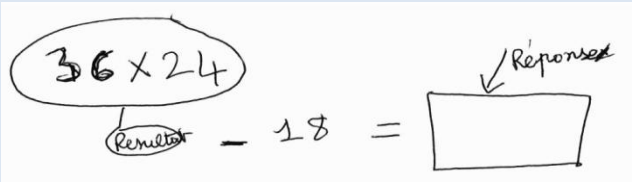
- Réfléchir à un dispositif matériel qui jouerait le rôle de « juge de paix » : certains élèves s'organisent effectivement avec du matériel
- Dès lors, on **prévoit par le calcul** ce que les autres vont **trouver**
- En fin de travail, on demande le résultat aux élèves qui ont manipulé
- Une fois le résultat connu, la mise en commun consiste à comprendre pourquoi, le cas échéant, la prévision était fausse, incomplète…
- Éventuellement, on relance une nouvelle rédaction.
- On s'accorde pour une stratégie, une entrée dans le problème, une rédaction collective.

91

Une piste de travail pour les problèmes à énoncés textuels : les centres de calculs.

- Groupes A : dans une salle de cinéma, il y a 36 rangées de 24 fauteuils chacune. Pour la séance du soir, 18 places seulement restent vides. Combien y a-t-il de spectateurs dans la salle ?

- Groupes B : Dans une salle de cinéma il y a 12 rangées de 62 fauteuils. Pour la séance de ce soir, on a compté 592 spectateurs. Combien reste-t-il de places vides ?

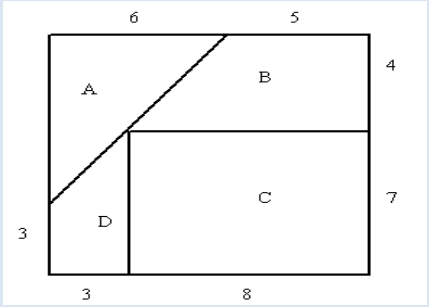


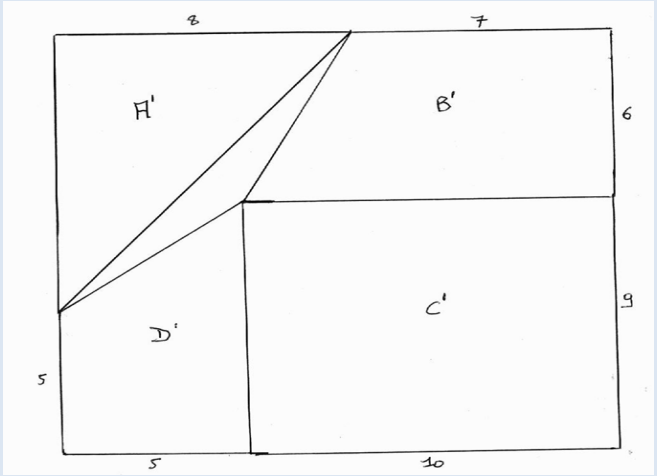
Ce type d'activité permet de séparer la partie modélisation de la partie calcul.

Dans le domaine du numérique, les mathématiques ne se confondent pas avec le calcul.

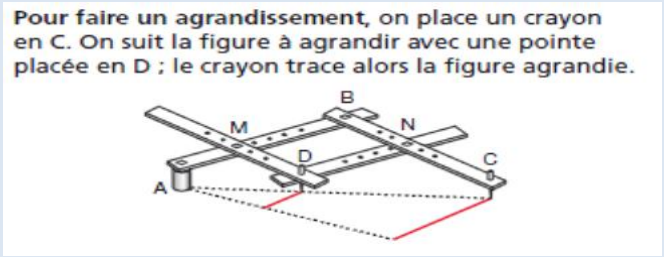
“Problème” de proportionnalité dans un cadre géométrique

(SAA rebaptisée récemment : tâche complexe…)





Variables significatives : 4→8, 4→6, 4→7



Quelques conseils

Travaillez la consigne

- Installez les élèves dans la durée des apprentissages (chantiers, micro-séquences pour le groupe).

-Réfléchissez à l'individualisation des parcours en maintenant une même tâche. Pour cela,

- Jouer sur les variables de commandes de la situation
- Jouer sur les procédés de calculs *(algorithmes évolutifs)*

-Soyez attentifs aux difficultés non spécifiques aux mathématiques : *(lecture, représentations spatiales, cultures différentes).*

Les programmes 2016 nous y incitent. Il sont seuls force de loi.

Enfin, le suivi d'un manuel sans jamais de mises en scène en classe installe les élèves dans une relation défaillante aux mathématiques

Conclusion

- La manipulation, si elle n'est pas intégrée dans un processus d'apprentissage, ne permet pas aux élèves de progresser, sauf pour ceux qui ont compris qu'au-delà de la manipulation, le seul enjeu était de retenir le savoir affiché parle professeur.
- Si le résultat peut être obtenu par l'action, les élèves n'ont pas à engager un travail cognitif. Ils se bornent à faire des constats qui restent attachés au contexte.
- Le passage d'une validation pragmatique à une validation syntaxique est constitué de continuités et de ruptures. Il est donc utile de lier les transformations dans le milieu des signes et les transformations dans le milieu matériel lorsque c'est possible.
- Cet enseignement qui consiste à demander de prévoir n'est pas destiné à une élite. La tendance à vouloir faire manipuler (de type 1) les élèves qui seraient en difficulté en mathématiques ne fait que creuser l'écart entre ceux qui sont déjà entrés dans les écrits mathématiques et ont compris leur usage et ceux qui tardent à comprendre l'intérêt de ces écrits.
- En conclusion, déclarer qu'il est nécessaire de passer «du monde concret. . . à une vision abstraite» est une vieille lune qui n'a jamais aidé à construire des séquences de classe.

Merci de m'avoir écouté et…

Bon courage pour la suite.