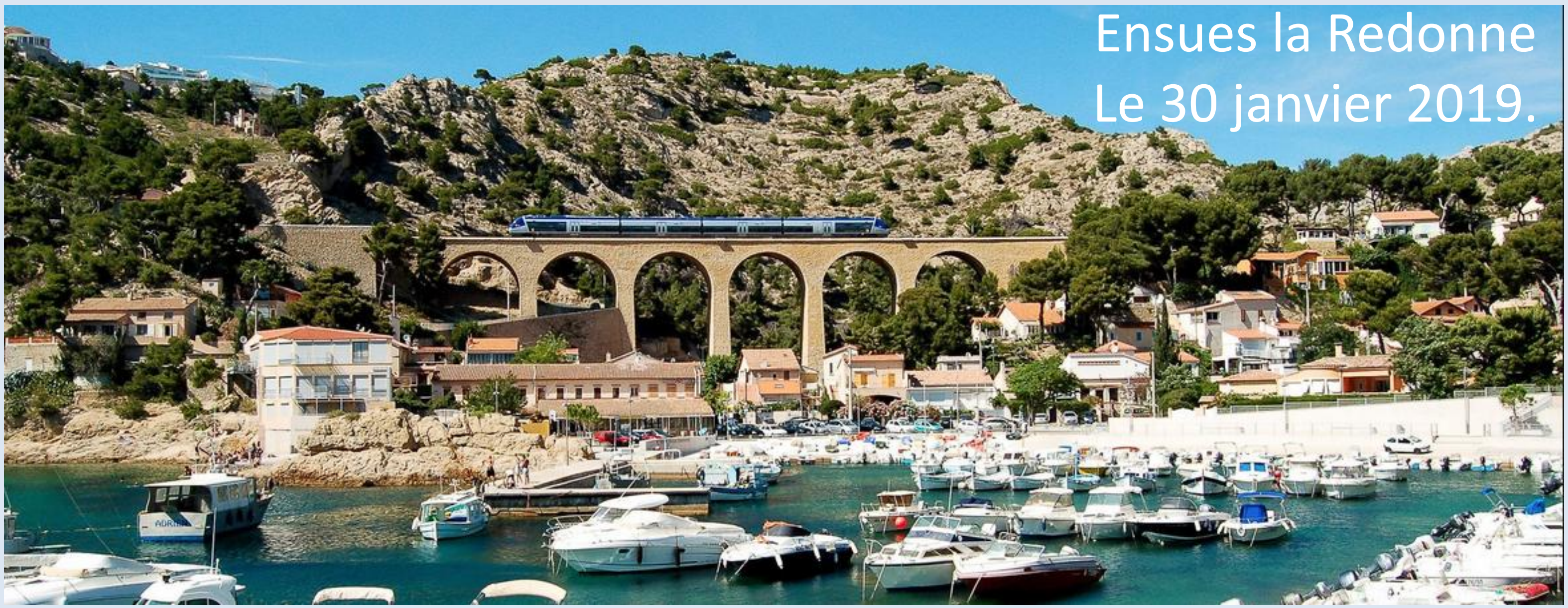
Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement des nombres et des opérations à l'école primaire.



Equipe Opération maths, Euromaths.

Joël Briand

ddm.joel.briand.free.fr

opération.maths.free.fr

Plan

- Première partie
  - Qu’est ce que « faire des mathématiques »?
  - Quelques mises au point
- Deuxième partie : les programmes 2016
- Troisième partie
  - Numération et addition liées
  - Droite numérique : point aveugle
  - Algorithmes évolutifs : opportunité
  - Les nombres décimaux : les entiers ne suffisent plus
- Conclusions

Première partie
Préambule

Pour mieux se comprendre :
Deux « manipulations » comparées en CP.

7 jetons dans la boite.

On en enlève 4.

On compte le nombre de jetons qui restent dans la boite.

Ecrit bilan: 7 – 4 = 3

7 jetons dans la boite.

On en enlève 4.

On ferme la boite. Les élèves prévoient le nombre de jetons qui restent dans la boite.
Pour cela ils peuvent écrire : Ecrits personnels.

Ecrit bilan : 7 – 4 = 3

L'illusion entretenue de la même séquence de classe parce que le même écrit est affiché.

Mais deux formes différentes de rapport au savoir.

Deux formes différentes de rapport à l'écrit .

Même milieu de référence ; milieu d'apprentissage différent.

Quatre activités comparées en CM1

- *Scénario 1 :* Le professeur explique la technique pour calculer 1,45 + 2,7 en s'appuyant sur les savoirs des fractions. Il fait ensuit le lien entre savoirs faire anciens et nouveaux (addition en colonne).

- *Scénario 2 :* Lecture d'un énoncé écrit au tableau *: « Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m. Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ? ».* Travail individuel ou par groupes. Ecriture des démarches sur une grande feuille qui sera affichée éventuellement au tableau. Synthèse collective.

- *Scénario 3* : Par groupe : deux baguettes de longueurs connues et affichées : 1,45m et 2,7m. Consigne : « Je vous demande de trouver la longueur de la baguette obtenue en mettant ces deux baguettes bout à bout ». Les élèves disposent de mètres. Ils mesurent et trouvent la longueur totale. Synthèse collective.

- *Scénario 4 :* Dans la classe, deux baguettes de longueurs connues et affichées: 1,45m et 2,7m. Consigne : « Prévoyez par le calcul la longueur de la baguette obtenue lorsque l'on mettra ces deux bout à bout ».

	Situation 1	Situation 2	Situation 3	Situation 4
Problème posé	non	Oui (à partir d'un énoncé)	Oui (à partir d'un matériel)	Oui (à partir d'un matériel)
Action de l'élève	imiter	Trouver un résultat puis repérer les erreurs lors de la correction.	Mesurer.	Trouver un résultat puis repérer les erreurs par expérimentation manipulation.
Transfert de responsabilité	non (ou maïeutique)	Oui (lire un énoncé et résoudre le problème).	oui (mesurer)	Oui (prévoir puis vérifier en mesurant)

- Dans ces deux exemples les réponses à « combien il y en a dans la boîte ? » et à « quelle est la longueur de la bande ? » s’élaborent en s’appuyant :
- Soit sur une manipulation de type 1 : le matériel permet de comprendre la situation et d’obtenir une réponse.
- Soit sur une manipulation de type 2 : le matériel permet de comprendre la situation (éventuellement en simulant avec une manipulation de type 1) puis de valider des prévisions effectuées ailleurs dans un milieu de signes.

- Le matériel ne joue pas les mêmes rôles.
- Seule la manipulation de type 2 engage à coup sûr une activité mathématique.

Alors, qu’est-ce que faire des mathématiques ?

- Mathématiser c’est construire un modèle (produit par un langage : i.e. « moyen d’objectiver et de développer la pensée. ») en vue d’exercer un contrôle sur un milieu (souvent matériel en début de scolarité).

- **Le milieu matériel permet de donner du sens à la tâche à accomplir qui est de modéliser et prévoir. Il joue son rôle lors de phases de vérification.**

- La manipulation est donc un terme à prendre avec précautions : quelle est sa place ? son rôle ? Comprendre le jeu, prévoir puis vérifier..

Pour des moments clés d’apprentissages, un manuel doit encourager à fréquenter trois milieux emboités.

L’évocation à l’aide d’images et de textes : réinvestissement.

Avant : le travail avec les objets : manipulation de type 2.

L’écriture formelle : institutionnalisation.

La recherche d'activités motivantes et les propositions des « rétronovateurs »

- L'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, pour des raisons diverses, s'est de moins en moins appuyé sur des manipulations d'objets pour organiser des activités.
- Or c'est par un appui sur du matériel que les élèves sont motivés.
- Le merchandising actuel : « méthode de Singapour », « méthode Montessori », etc. profite de la quête légitime de l'épanouissement des élèves pour laisser croire à des découvertes récentes sur les manipulations en *« sacralisant le bricolage»* et drainer ainsi des enseignants soucieux d'améliorer leur enseignement.
- Or, nous venons de voir que des manipulations de type 1 n'engagent pas les élèves dans une activité cognitive.
- **On est donc loin de la vieille lune : «** phase concrète, phase imagée, phase abstraite »

Deuxième partie
Programmes 2016

Programmes 2016
6 Compétences travaillées

- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Raisonner
- Calculer
- Communiquer.

Trois domaines imbriqués

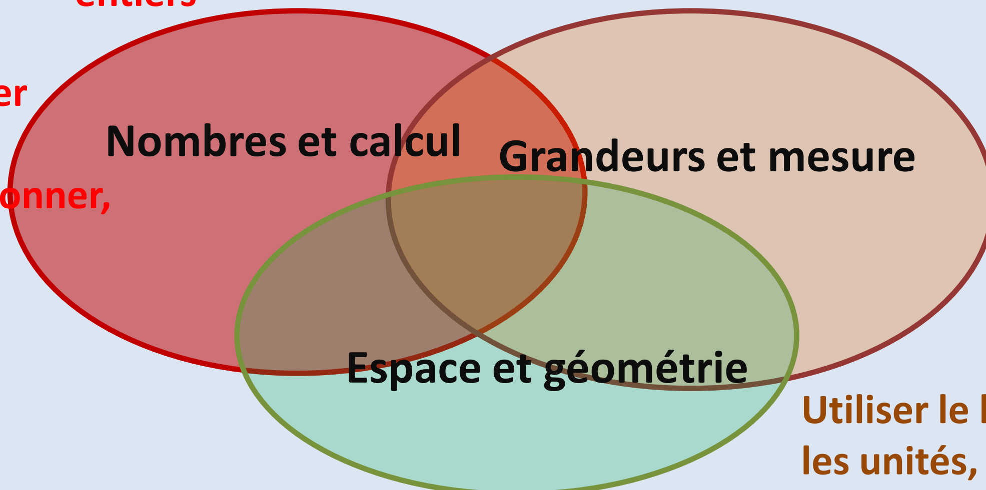
Nommer, lire, écrire
Représenter
les nombres entiers

Résoudre des problèmes en utilisant
Des nombres entiers et le calcul

Calculer avec des nombres
entiers

Résoudre des problèmes impliquant
des longueurs, des masses,
des contenances, des durées,
des prix.

Comprendre et utiliser
des nombres entiers
Pour dénombrer, ordonner,
Repérer, comparer.



Comparer, estimer,
mesurer des longueurs,
des masses, des contenances,
des durées

Utiliser le lexique,
les unités,
les instrument de mesures spécifiques
de ces grandeurs

Reconnaître, nommer, décrire
Reproduire, construire quelques
Figures géométriques

Reconnaître, nommer, décrire
Reproduire, construire quelques
solides

Se repérer et se déplacer
En utilisant des repères

L’accent est mis sur 3 points essentiels

- L'articulation très forte entre nombres et grandeurs d’où la résolution de problèmes vue comme activité de modélisation de situations faisant intervenir les grandeurs.
- L’étude de différentes représentations des nombres, qu'elles soient langagières ou symboliques (désignations orales, décompositions/recompositions, demi droite graduée..) et sur leurs liens
- Un point de vue sur le calcul, conséquence de ces 2 points :
  - le calcul est "motivé" par les situations qu'il permet de résoudre (sans manipulations),
  - il est nourri des équivalences entre les différentes désignations des nombres.

De ce fait les techniques opératoires usuelles n'interviennent que lorsque le besoin s'en fait sentir, progressivement sur les cycles 2 et 3.

Caractéristiques d’une situation d’apprentissage par adaptation

• Y a-t-il bien un problème posé aux élèves ou ont-ils seulement à appliquer une consigne?

• L'utilisation de la connaissance est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves?

• L‘élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée?

• Comment voit-il qu'il a réussi ou échoué? (Est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions interprétables par l'élève?)

• La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir?

• L'organisation de la situation permet-elle :

- À chaque enfant d'être confronté au problème et de faire des tentatives ?
- L'échange et la confrontation des points de vue ?

Fréquence de ces situations

Ces situations « clés » sont suivies de séquences de classe au cours desquelles l'élève aura à :

identifier les savoirs acquis

apprendre et retenir

s'entraîner

- Elles n'excluent par les situations d'apprentissage par familiarisation
- C'est au professeur de faire des choix en fonction de sa classe.

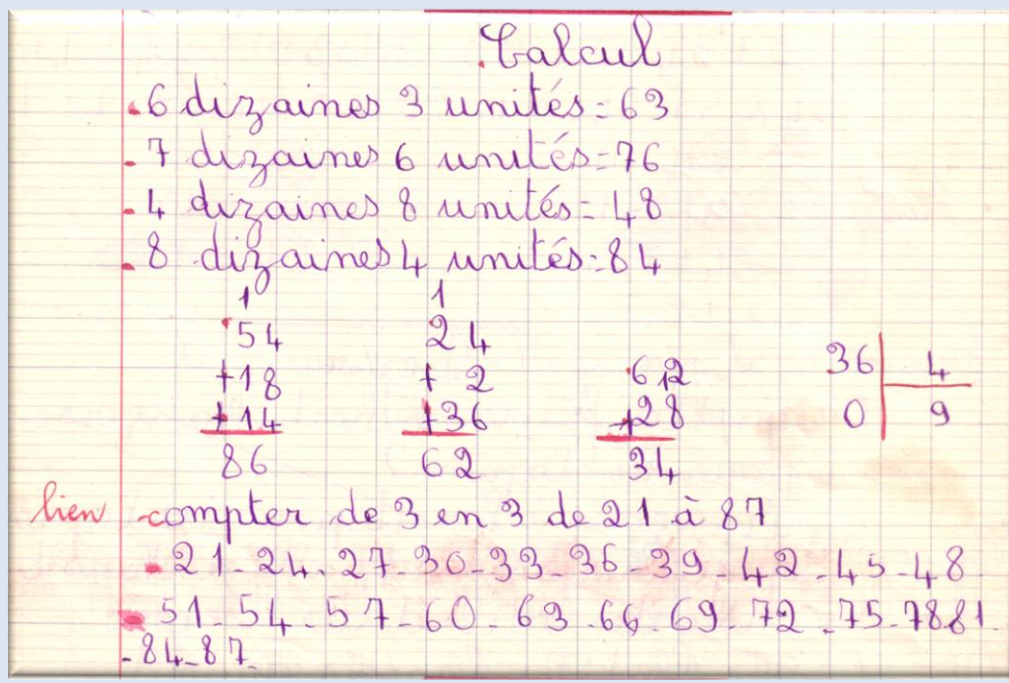
Pourquoi cette approche reste difficile à faire partager ?

- Le système,
  - La succession des programmes : l'étude des fluctuations des programmes 2002, 2008, 2016 en mathématiques met en évidence des tensions, des conflits dont la nature dépasse les seuls enjeux mathématiques. : *(cf: « les 4 opérations dès le CP », « le produit de deux nombres décimaux »).*

- Le professeur :
  - Peu d'outils pour mettre en scène des situations d'apprentissage par adaptation au sein d'une progression
  - L'idée que ce type d'approche serait réservé à une élite. D'où une « pédagogie spontanée » qui consiste à préconiser les tâches de manipulation (de type 1) pour les élèves étiquetés en difficulté, et à enseigner des procédés.
  - L'idée de ne pas ennuyer les élèves donc de faire un peu de tout chaque jour, donc de renoncer à une « ouverture de chantier »
  - Difficulté personnelles liées aux mathématiques à enseigner *(l'exemple de la soustraction, des décimaux).*

Les effets d’annonces ministérielles :
« les 4 opérations dès le CP »

- Au CP : partages équitables simples.
- Enseigner la division au CE1 (nombres inférieurs à 100) consiste avant tout à proposer des situations fondées sur des partages équitables de collections et sur des multiplications à trous simples. (2 et 5).
- Attention aux effets d’annonce…



Troisième partie

La numération

Joël Briand 30 janvier 2019

Nombre et numération

- L’acquisition du concept de nombre et l’étude de la « numération » sont bien sûr imbriquées mais ne relèvent pas des mêmes types de tâches car ces deux objets ne sont pas de même nature.
- Le nombre est une « grandeur » il se définit comme propriété commune à diverses collections d’objets et prend son sens par les fonctions qu’il assure.
- Mais naturellement il doit être « dit » ou « écrit » et donc se pose la question de la manière de le « désigner ».
- Les numérations sont les systèmes organisés de codage des nombres.
- Il s’agit alors de penser la construction de la numération comme un « produit dérivé » de l’entrée dans une forme d’écrit.

Pratiques sociales : premières lectures des nombres

Co-construction écriture des nombres et opérations.

Se donner les moyens de construire numération et +

puis - , x et : de façon dialectique : s'appuyer sur des algorithmes évolutifs.

Dépendance entre nombres, grandeurs et mesurage.

Lier nombre, droite numérique et mesure des grandeurs.

Où les nombres entiers ne suffisent plus

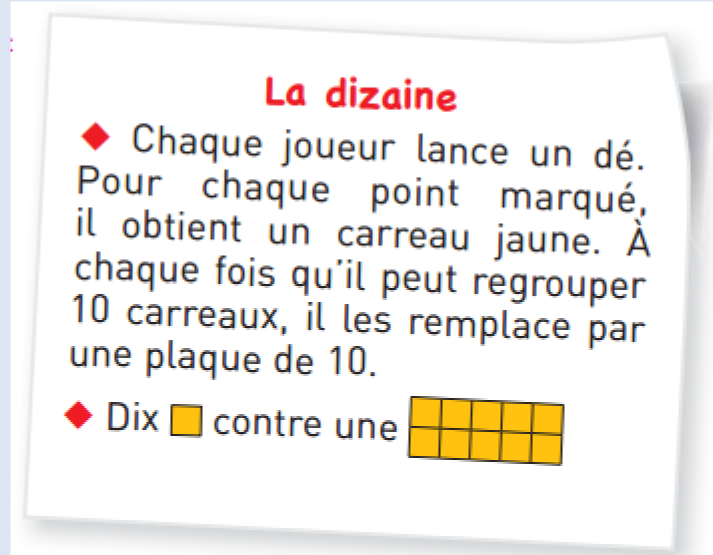
L'écrit se complexifie : la numération, l'addition

Accès à la numération
Les «principes organisateurs» déterminants

- Il est classique de voir un élève lire l'étiquette « 18 » en énonçant « dix-huit » et considérer simultanément que 18 c'est 1 + 8 (donc c'est 9 !) sans voir l'incompatibilité entre ces deux lectures.
- On constate donc que ce signe « 18 » a une signification pour l'élève qui n'est pas « stable »
- Pour que l'élève s'approprie la signification souhaitée de ce « signe », un discours magistral n'est pas suffisant.
- Objectif construire des situations qui permettent cette appropriation et accompagne ce changement d'interprétation des signes également connus « 1 » et « 8 ».

Extraits de cette situation d'évaluation

Première phase
(Jeu de la dizaine)

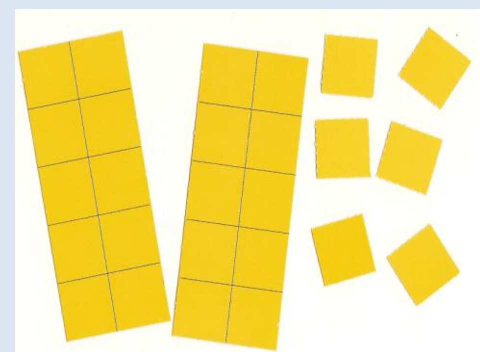

La dizaine

◆ Chaque joueur lance un dé. Pour chaque point marqué, il obtient un carreau jaune. À chaque fois qu'il peut regrouper 10 carreaux, il les remplace par une plaque de 10.

◆ Dix ■ contre une ▦

Pour calculer ce score, les élèves peuvent utiliser plusieurs niveaux de procédures :

- Compter une par une chaque case jaune
- Compter les plaques de 10 (en disant : « dix, vingt ») puis compter un par un les cases jaunes
- Compter les dizaines en disant 1, 2 puis compter un par un les cases jaunes
- Utiliser directement la symbolisation 20+ 6 = 26

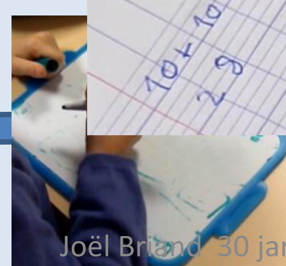


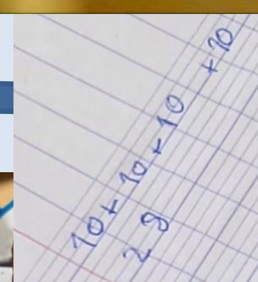
Donc faire évoluer le matériel

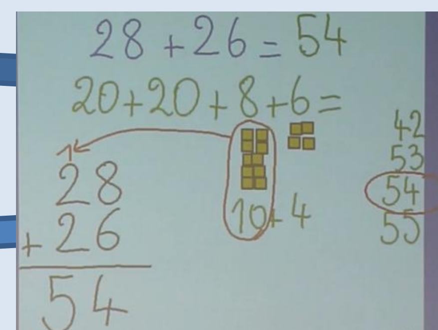
Le comptage un par un de toutes les cases jaunes n'est plus possible. Le but à terme est que les élèves « lisent » ce matériel « 3 dizaines et 4 unités donc 34 »

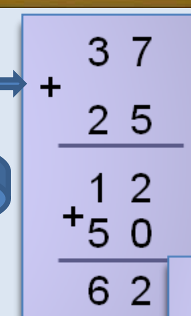
Construction conjointe de la numération et de procédés évolutifs de calculs

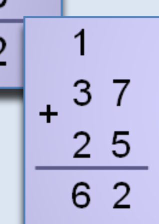
« Les opérations arithmétiques sont introduites dans le cadre de la résolution de problèmes dont elles sont un outil de modélisation. »











Même démarche : manipulation de type 2.

Travail sur les écritures chiffrées

Complète.

56, c'est ...... dizaines et ...... unités.

63, c'est ...... unités et ...... dizaines.

4 dizaines et 9 unités, c'est ....

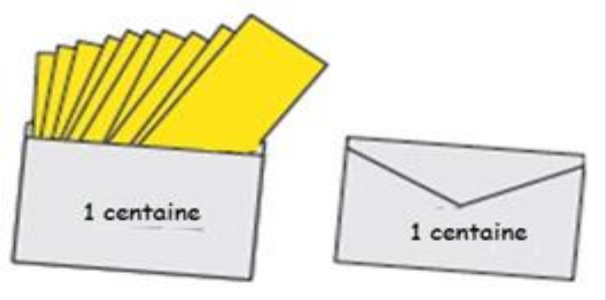
7 unités et 2 dizaines, c'est ....

Réinvestissement dans des contextes sans matériel

Avec 34 chocolats, combien de boîtes de 10 chocolats peut-on remplir ?

On peut remplir .... boîtes et il reste .... chocolats.

En CE1 extension du champ numérique : la centaine

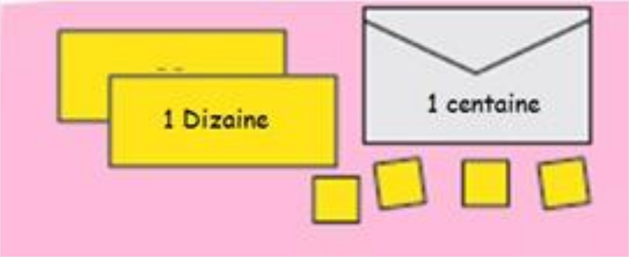


Un exemple en CE1:

Le jeu de la centaine

1 centaine, c'est 10 dizaines

c'est 100 unités



100 + 10 + 10 + 4

1 centaine, 2 dizaines et 3 unités

124

Mais aussi

2 dizaines, 1 centaine et 3 unités

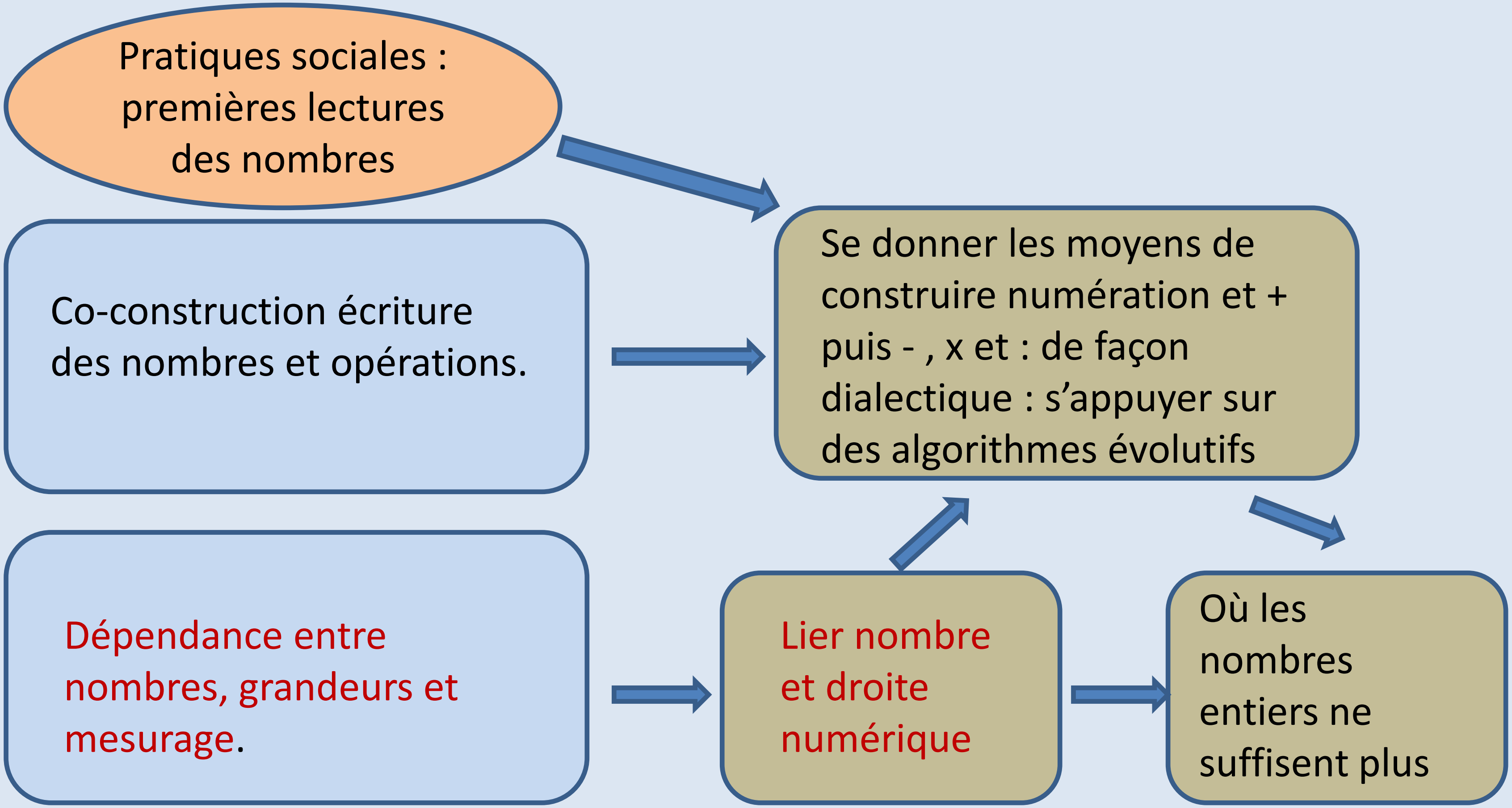
12 dizaines et 3 unités

Le tableau de numération: un outil

centaines	dizaines	Unités
		
		245
	24	5
2	4	5

la droite numérique
point aveugle dans l’enseignement

Joël Briand 30 janvier 2019



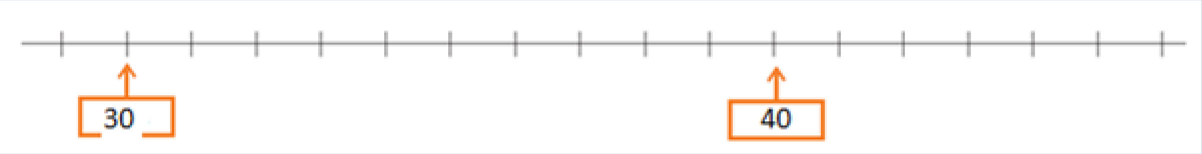
Une image mentale des nombres : file, piste, droite numérique

La droite : outil/objet

- La droite graduée est un outil très performant pour comparer et ordonner les nombres ainsi que pour mettre en place certaines procédures de calcul, notamment les calculs additifs et soustractifs par sauts et le calcul de division par encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur.
- Ce travail est peu abordé à l'école. Il est souvent confondu avec l'étude du double décimètre et des unités légales de longueur.
- C'est la genèse du système métrique qui devrait faire partie des découvertes des cycles trois et quatre. (lien entre histoire et mathématiques).

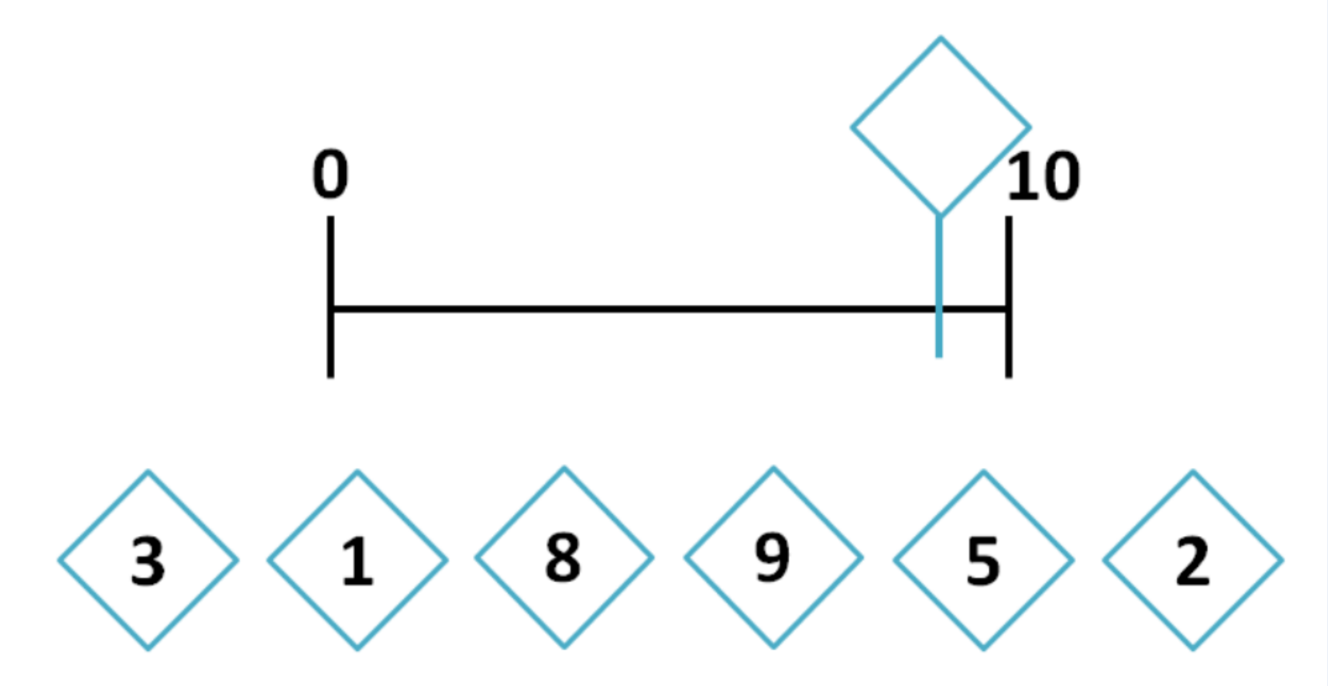
Nécessité de construire une image mentale de la droite numérique

.

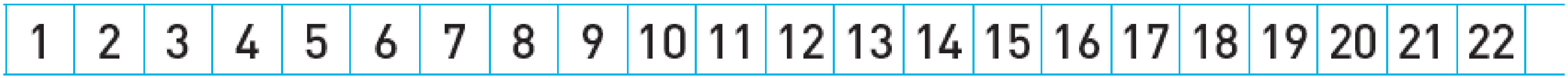


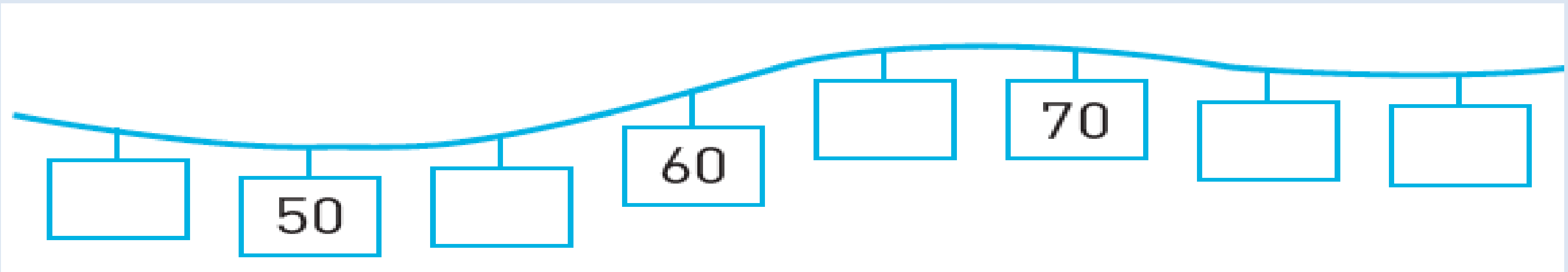
- Travailler le lien entre distance (notion géométrique : nombre de graduations) et écart (notion numérique : l'écart 37-15)
- Permet de donner du sens à
  - « 36 est entre 30 et 40 »
  - « 39 est proche de 40 »
  - « 35 est entre 30 et 40. Il est juste au milieu »
  - « 35 est à égale distance de 30 et 40 »
  - Etc.

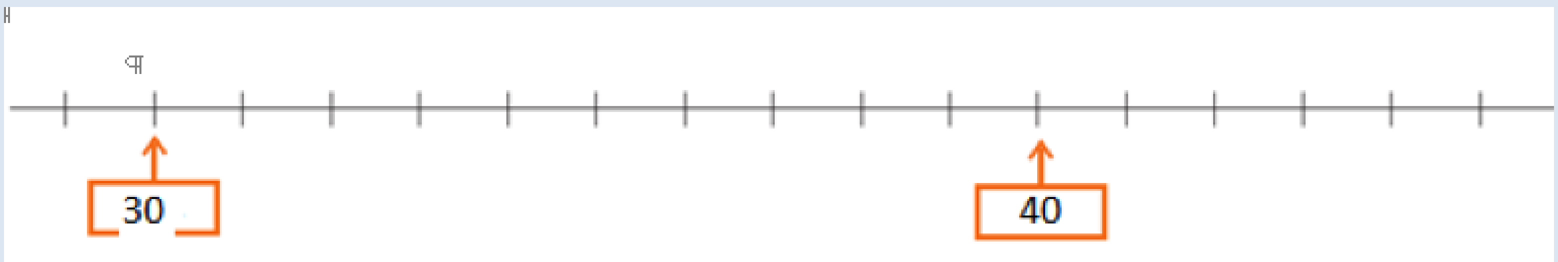
Exercice 6 des repères CP 2018…

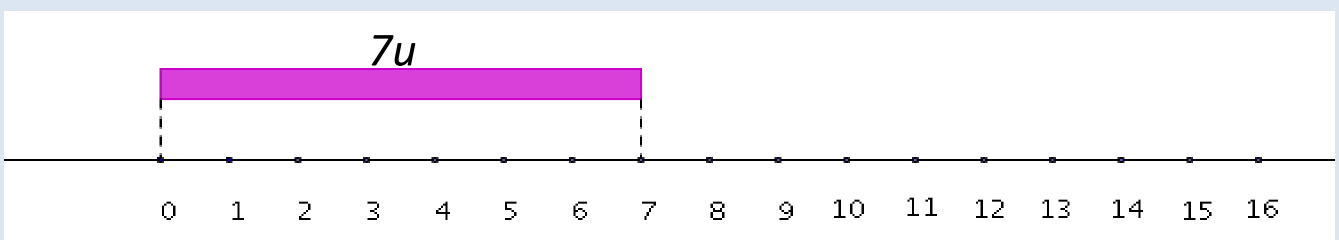


Piste, file, droite numérique, double décimètre : du discret au mesurable







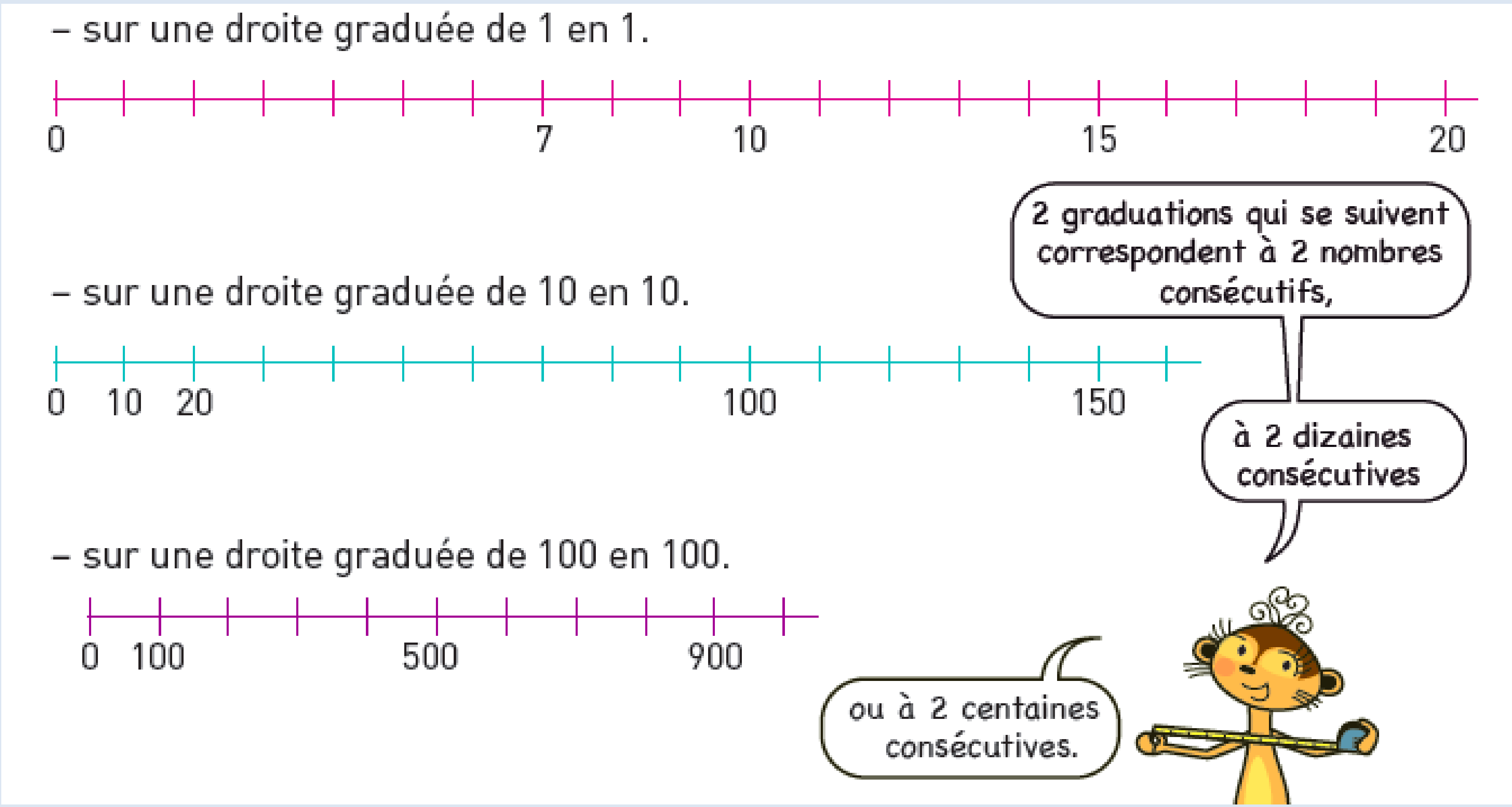


Joël Briand 30 janvier 2019

Associer nombre, quantité et position sur la piste des nombres

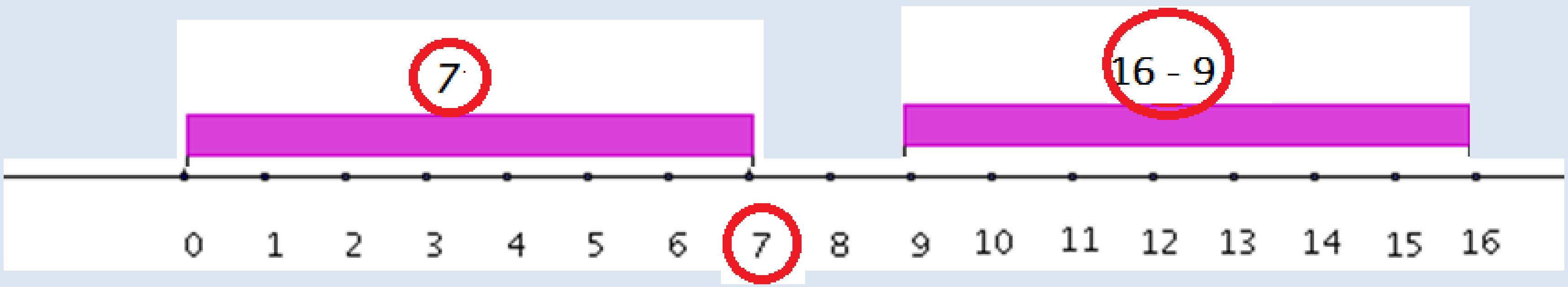
Différentes échelles de graduation…
… vers la proportionnalité (CE2, CM1)

Pour représenter les nombres, on peut les placer

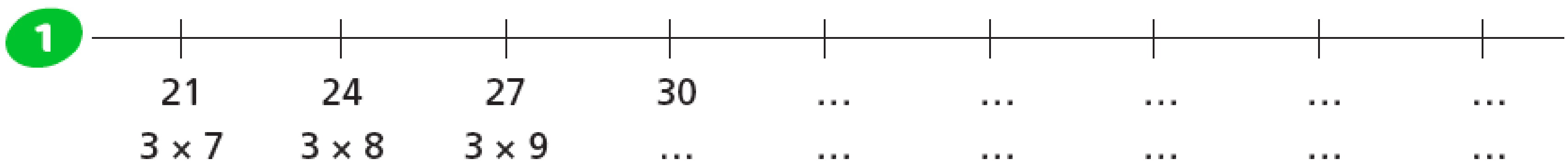


La droite graduée et la mesure (CE2- CM1 – CM2)

Un nombre désigne à la fois un point, la distance de ce point à l'origine, mais aussi la longueur d'une bande.



Droite graduée et multiplication



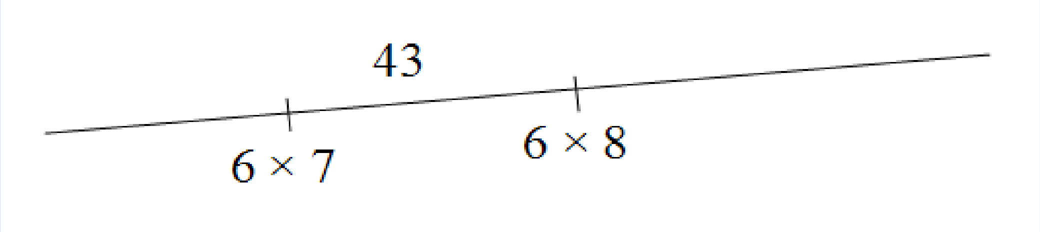
a. Reproduis cette droite graduée de 3 en 3.
Sous chaque graduation, complète avec un nombre et un produit.

b. Place approximativement le nombre 41 sur cette droite.

c. Encadre 41 par deux multiples consécutifs de 3 : $3 \times \ldots < 41 < 3 \times \ldots$

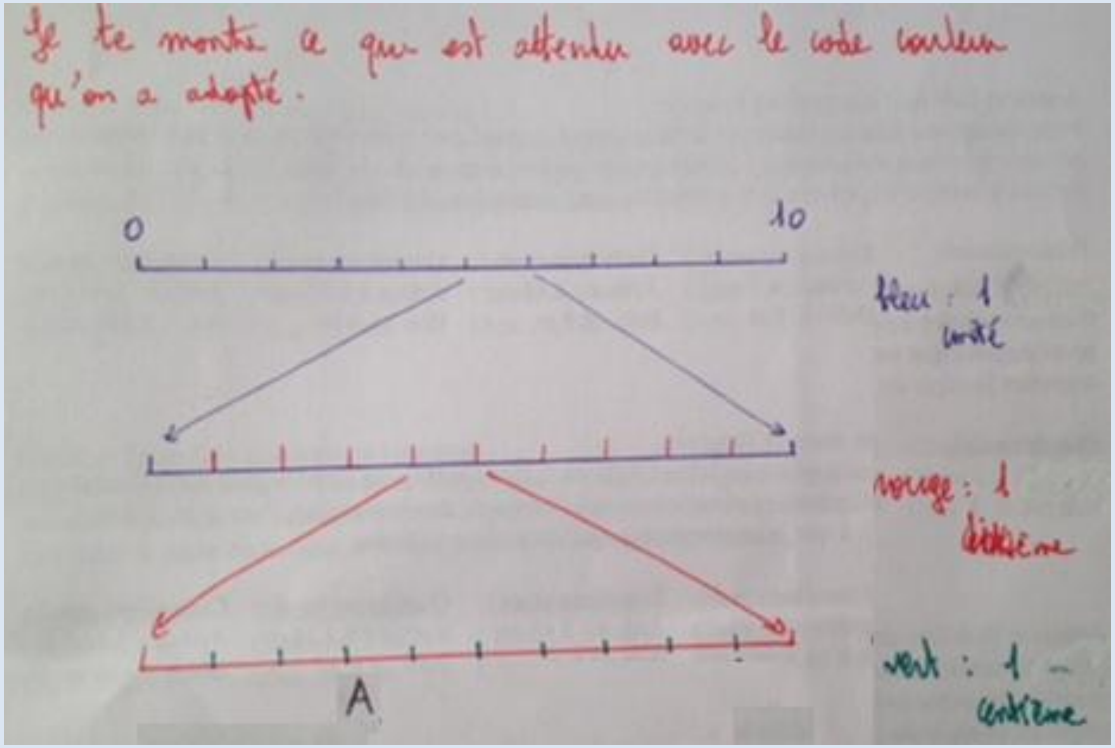
Droite graduée et division

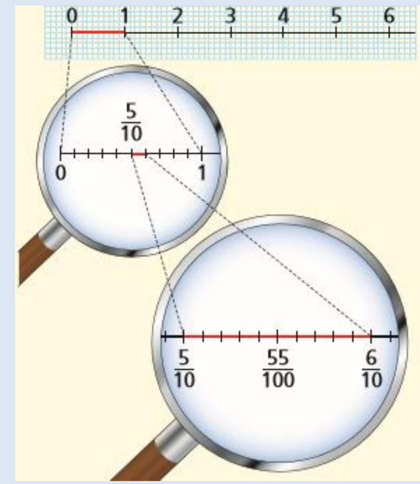
- Résoudre des problèmes en s'appuyant sur la droite numérique :



« Quand on encadre 43 par deux multiples consécutifs de 6 et que l'on écrit 43 = (6 x 7) + 1, on dit que l'on fait la division de 43 par 6. Dans cette division, le nombre 7 s'appelle le quotient. C'est le nombre de fois où 6 est contenu dans 43. 1 s'appelle le reste. «

Droite graduée et décimaux

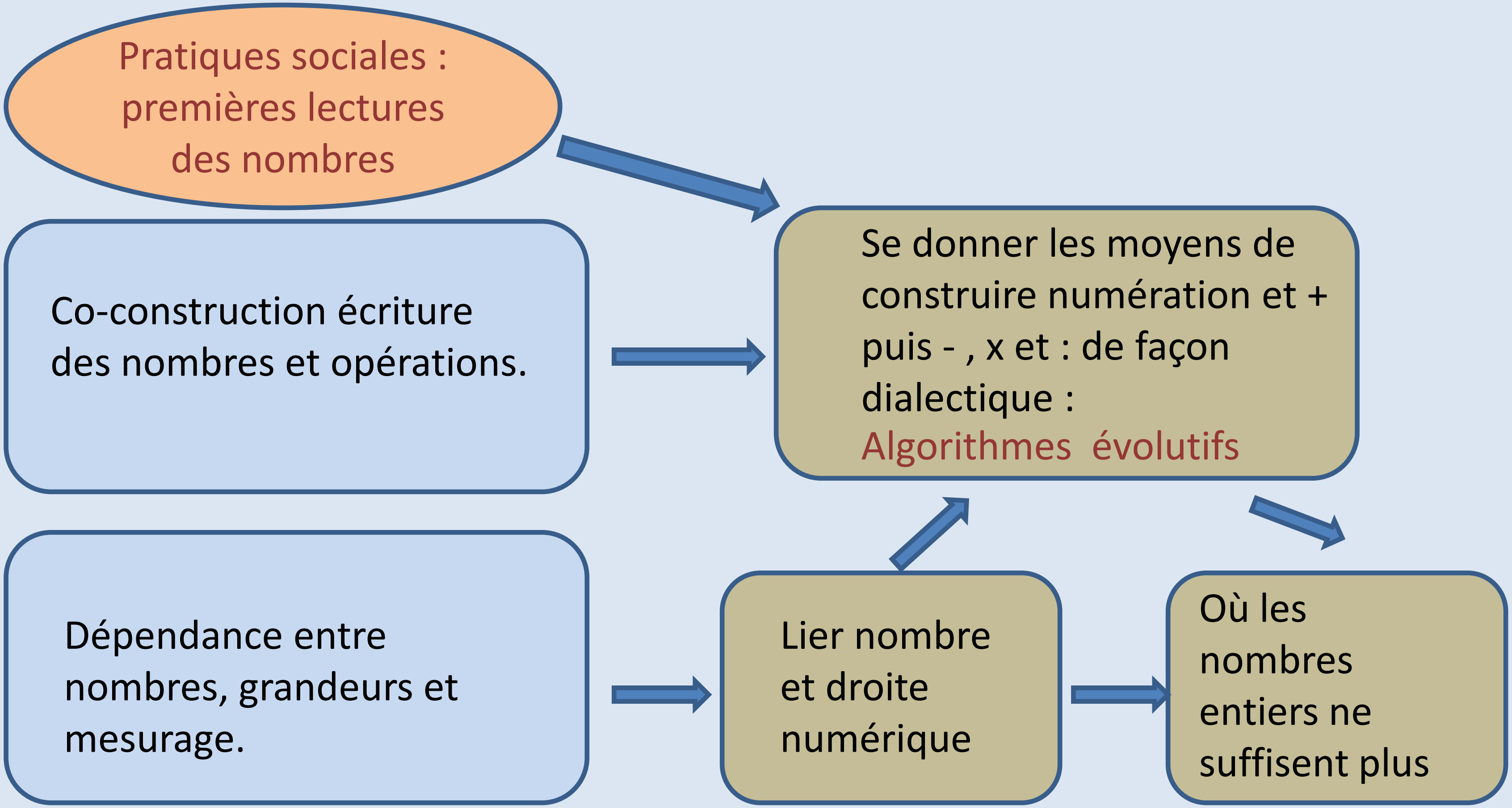




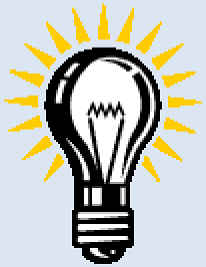
Claire et Dina font des sauts en longueur.
Pour chacun des 5 essais, place les lettres C (pour Claire) et D (pour Dina) le plus précisément possible pour que ton camarde puisse retrouver la longueur de chaque saut. Pour cela, il faut respecter la règle du jeu que je te montre avec un exemple au tableau.

Premier essai :	Deuxième essai :	Troisième essai :	Quatrième essai :	Cinquième essai :
Claire : 4,6 m	Claire : 4,8 m	Claire : 4,64 m	Claire : 5,389	Claire : 5,785 m
Dina : 5 m	Dina : 4,5 m	Dina : 4,7 m	Dina : 5,3 m	Dina 5,783 m

les algorithmes évolutifs



« Le sens et l'automatisation se construisent simultanément »   (Programmes 2016.)



Petits calculs… : faites les soustractions 84-36 puis 125-97.

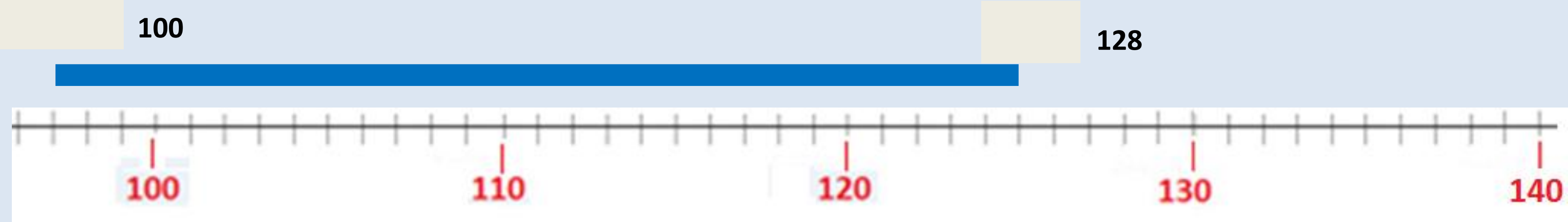
Les techniques

- **La technique par « démolition »**
- exemple 125-97

- **Avantage** : cette technique repose sur la compréhension de notre système d'écriture des nombres largement travaillé au cycle 2.
- **Inconvénients** :
- -Elle correspond à une manipulation à partir du matériel de numération…
- -Elle est très difficilement utilisable dans les cas où il y a un zéro intermédiaire sauf à automatiser de façon très coûteuse.
- -Cette technique devra donc être abandonnée en cycle 3 ou au collège.

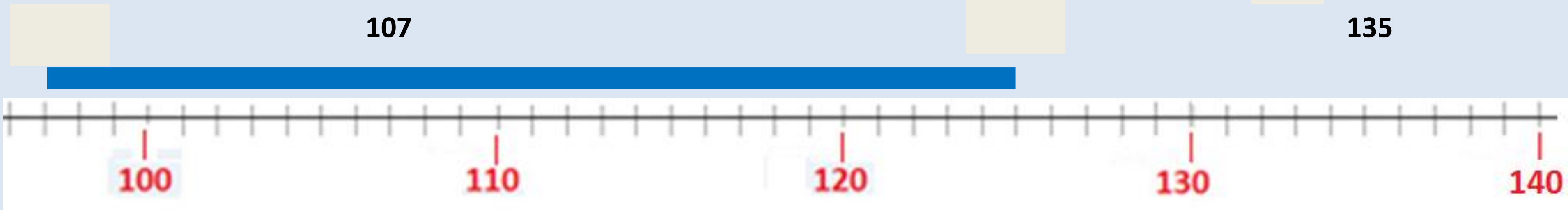
La technique « par compensation ou translation » : exemple 125-97

- Méthode « à la russe » : on cherche un nombre rond



- Méthode usuelle : on ne peut pas calculer 5-7 : on ajoute 1 dizaine à 125 et pour conserver l'écart on ajoute 1 dizaine à 97.

$$\begin{array}{r} 125 \\ \underline{-97} \end{array}$$



avantages : cette technique est utilisable quels que soient les nombres choisis. Elle s'appuie sur des propriétés mathématiques qui seront utiles au cycle 3 et au collège. C'est la technique usuelle de la soustraction en France, elle sera enseignée au cycle 3. Les élèves qui l'auront apprise en CE1 n'auront pas besoin de changer de technique au cycle 3.

inconvénient : elle nécessite de prendre le temps de travailler la propriété de conservation des écarts, sur laquelle elle repose.

Les procédés de calcul comme aboutissement d’une construction mathématique.

125 – 97 ?

125 – 97

+3 128 – 100 +3

C’est donc 28.

47 – 35 ?

$$\begin{array}{r} 47 \\ -\ 35 \\ \hline \end{array}$$

C’est donc 12.

Méthode à la russe

457 - 128
459 - 130
529 - 200

329

1000- 256
1004- 260
1044- 300

744

Pratiques sociales : rendre la monnaie

1000- 256 : 4+40+700

Faire l'appoint

20 € pour 7 €   23 € pour 10 €

Donc, EN CE1

Appliquer la propriété de conservation des écarts pour construire une méthode soustractive

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 62 \arrow[d, bend right, "+2"'] & - & 48 \arrow[d, bend left, "+2"] \\ 64 & - & 50 \end{tikzcd}$$

$62 - 48 = 64 - 50 = \ldots\ldots$

Pour calculer 62 – 48, Liam calcule 64 – 50.
C'est comme s'il ajoutait 2 aux deux autres termes de la soustraction.

Conclusion : la technique en colonne

La soustraction : technique en colonnes

Exemple : 472 - 124

1ʳᵉ étape

	4	7	2
–	1	2	4

Tu écris :
les unités sous les unités,
les dizaines sous les dizaines,
les centaines sous les centaines.

2ᵉ étape

	4	7	10+2
–	1	1+2	4
			8

Tu commences par les unités :
2 – 4 ce n'est pas possible.
Tu ajoutes 10 unités au 1ᵉʳ nombre
et 1 dizaine au 2ᵉ nombre
pour conserver l'écart.
Maintenant tu peux calculer 12 – **4** = **8**
Tu écris **8** dans la colonne des unités.

3ᵉ étape

	4	7	10+2
–	1	1+2	4
		4	8

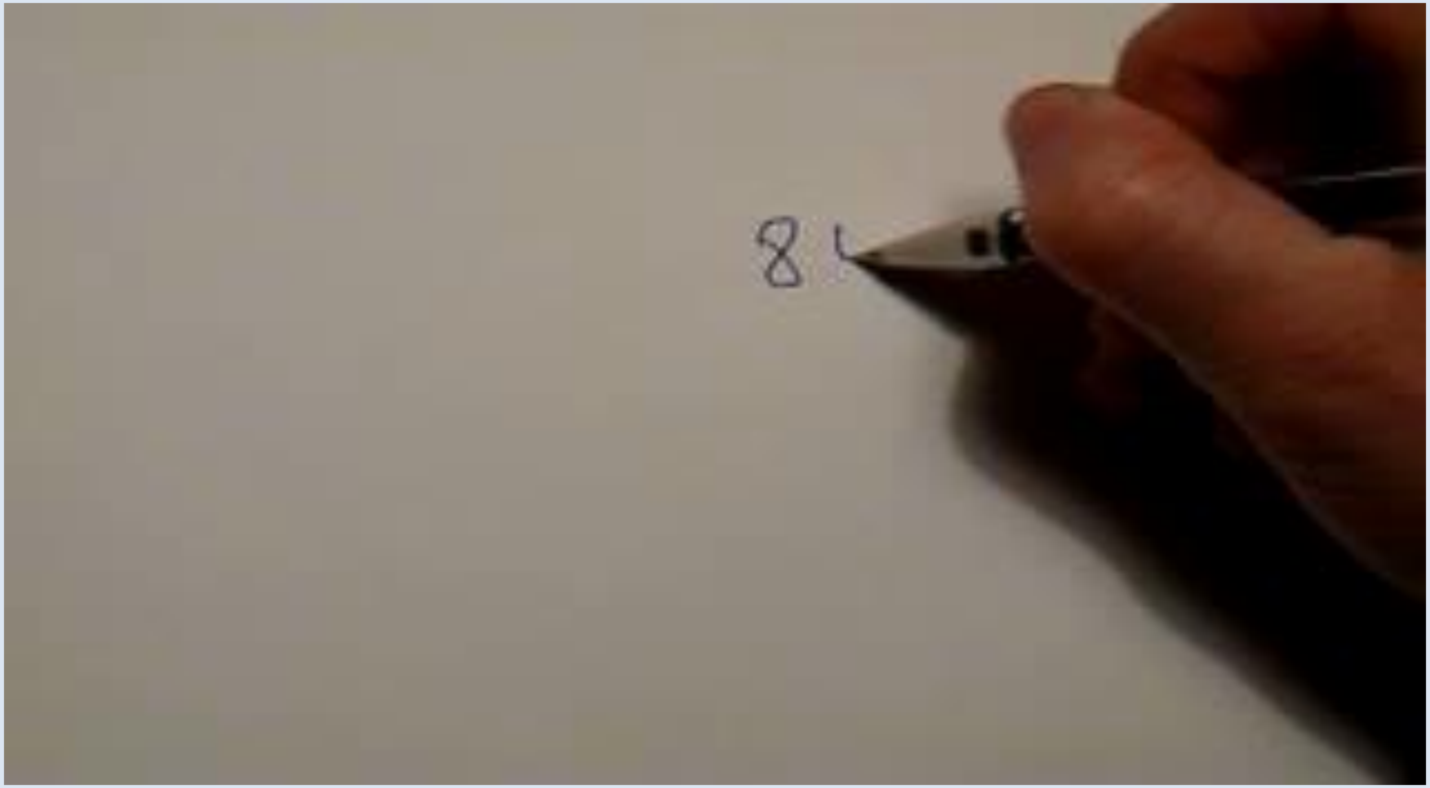
Tu soustrais les dizaines :
7 – 3 = 4
Tu écris 4 dans la colonne des dizaines.

4ᵉ étape

	4	7	10+2
–	1	1+2	4
	3	4	8

Tu soustrais les centaines :
4 – 1 = 3
Tu écris 3 dans la colonne des dizaines.
472 – 124 = 348

L'algorithme de la soustraction en CE1 se construit donc à partir d'une bonne connaissance de la droite graduée.

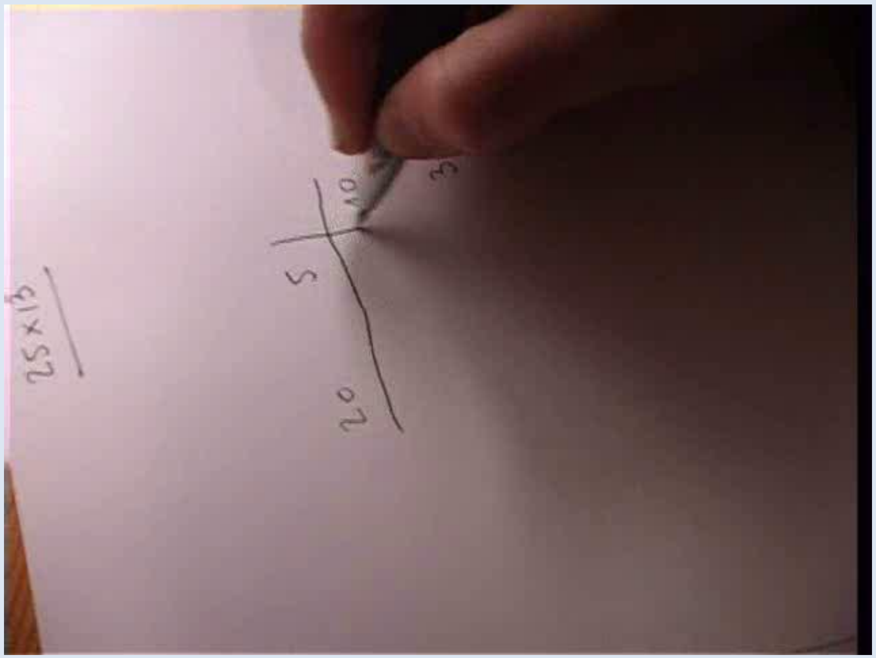


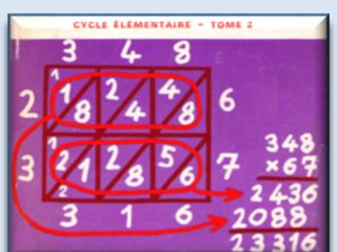
Technique définitive

La multiplication

l'exemple de la multiplication

25x13





Au seuil de réussite acceptable de 70%, pour la taille 8, la méthode classique permet 12 réussites sur 25 élèves soit 48%. L'autre méthode permet la réussite de 22 élèves soit 88%. Le gain est de 40%. Il augmente avec la taille des multiplications.

L'amélioration est plus forte chez les élèves moyens.

Recherche réalisée à l'IREM de Bordeaux (1973) auprès de 150 enfants de CM.

Conclusion : s’appuyer sur des algorithmes évolutifs en cycles 2 et 3.

Addition

$$\begin{array}{r} 37 \\ +\ 25 \\ \hline 12 \\ +\ 50 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +\ 25 \\ \hline 62 \end{array}$$

Soustraction

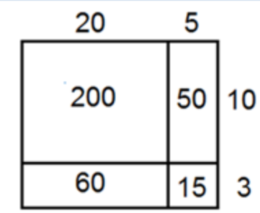
47 c'est 48

\- -

19 20

$$\begin{array}{r} 4\ {}_{10+}7 \\ -\ \\ {}_{1+}1\ \ 9 \\ \hline \end{array}$$

Multiplication



$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 60 \\ +\ 50 \\ +\ 200 \\ \hline 325 \end{array}$$

puis, plus tard

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 13 \\ \hline 15 \\ +\ 60 \\ +\ 50 \\ +\ 200 \\ \hline 325 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ \hline 325 \end{array}$$

La division au CM1.

Un éleveur de volailles veut expédier des œufs par boîtes de 24. Il a 439 œufs. Combien de boîtes doit-il prévoir ?

•**Au début**, **contrôle expérimental :** des prévisions obtenues (par calcul réfléchi) à l'aide d'un milieu matériel.

•**plus tard, contrôle par estimation** :

• exemple : 7053 divisé par 34 :

$34 \times 100 < 7053 < 34 \times 1000$

•**Le milieu est changé.** Ces ruptures, sont organisées par le professeur sur une période longue. (chantier)

$$\begin{array}{r|l} 7053 & 34 \\ -6800 & 34 \times 200 = 6800 \\ \hline 253 & 34 \times 7 = 238 \\ -238 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

207 reste 15

Les nombres décimaux

Pratiques sociales : premières lectures des nombres.

Co-construction écriture des nombres et opérations.

Dépendance entre nombres, grandeurs et mesurage.

Se donner les moyens de construire numération et + puis - , x et : de façon dialectique : s'appuyer sur des algorithmes évolutifs.

Lier nombre, droite numérique et mesure des grandeurs.

Où les nombres entiers ne suffisent plus.

Les nombres décimaux

A propos des décimaux
retour à plus de réalisme.

- Fractions et décimaux : Les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, on commence dès le CM1 l'étude de fractions simples (comme 1/2 1/4 1/3 2/3…) puis celle des fractions décimales.

- Du CM1 à la 6ème, on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers, qui sera étudié en 6ème.

- Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle 3 pour s'étendre aux dix-millièmes en 6ème.

Les opérations dans D.

-Addition et soustraction pour les nombres décimaux dès le CM1,

- Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier au CM2 ; multiplication de deux nombres décimaux en 6 ème.

- Division euclidienne dès le début du cycle 3, division de deux nombres entiers avec quotient décimal ; division d'un nombre décimal par un nombre entier à partir du CM2. Sera consolidé en 6°.

1-4 Questions autour des nombres décimaux

Des p’tits trous, encore des p’tits trous…

- Avec les décimaux et les fractions on doit couvrir toute la droite numérique ??
- Eh ! non….

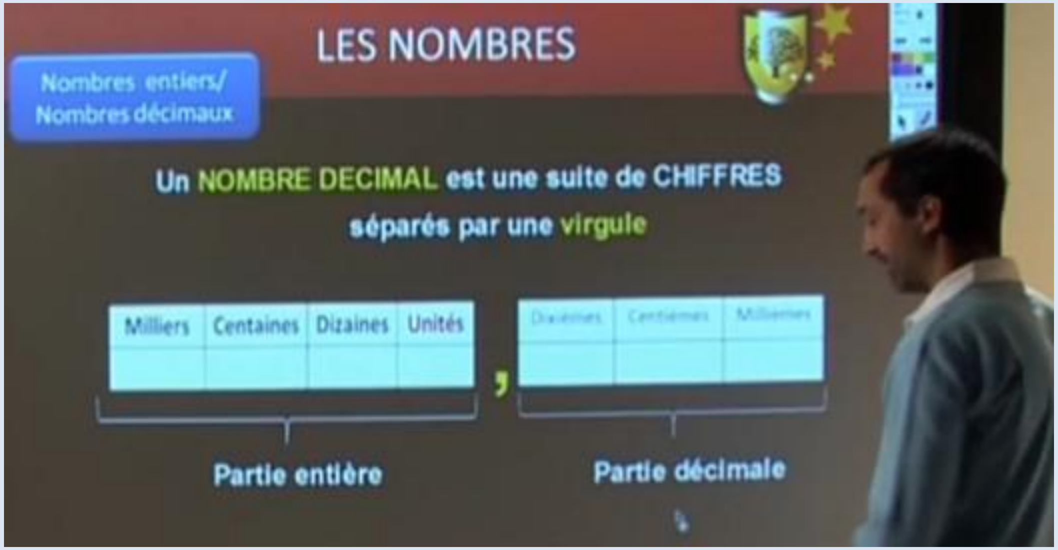
- Les Pythagoriciens montrent que la mesure de « ? » n’est pas une fraction… mais 1,414 suffit dans les activités humaines traditionnelles.

1, 414 213 562 373 095 048 …

Leur intérêt

- Approcher d'aussi près que l'on toute mesure d’une grandeur, donc tout nombre réel,
- Exprimer la mesure de grandeurs continues avec l'approximation voulue,
- Prolonger, sans trop de surcoût, les règles de calcul de notre numération décimale écrite des nombres entiers,
- Mais aussi, éveiller la curiosité dans l’exploration de la droite numérique.

Sur la toile…

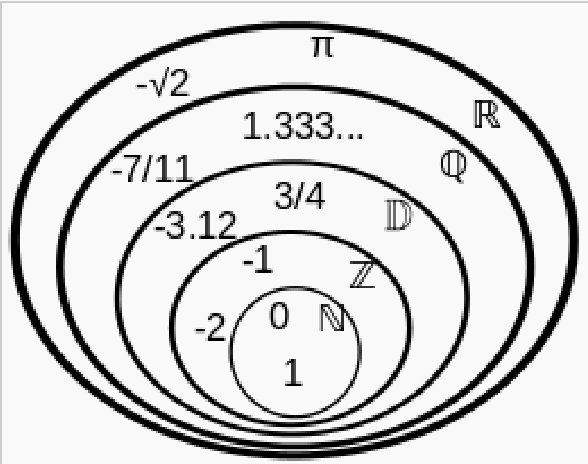


Ou comment définir un objet par son costume;;;
http://education.francetv.fr/matiere/mathematiques/sixieme/video/definir-les-nombres-entiers-

Définition mathématique : (inutile à donner en cycle 3 !)

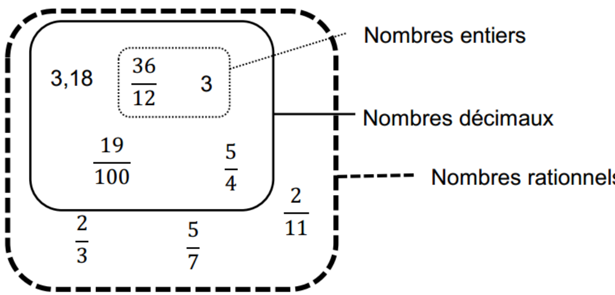
a est décimal . il existe un entier relatif m et un entier naturel p tels que $a = \dfrac{m}{10^p}$

Des représentations classiques mais porteuses de malentendus



Position de l'ensemble des décimaux D par rapport à l'ensemble des entiers relatifs Z et à l'ensemble des rationnels Q.

On peut schématiser la situation de la façon suivante :



WIKIPEDIA

EDUSCOL.

Un schéma qui donne une conception fausse de l'organisation des nombres. D'où la nécessité de travailler la droite numérique.

Petit problème

Essayons de ranger les « mots » suivants comme s'ils étaient dans un dictionnaire (les lettres étant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) :

1002 10134 102 10056 13

-L'ordre des décimaux est le même que celui du dictionnaire. Ce n'est pas celui des entiers naturels.

-Remarque : en physique 2,74 n'est pas 2,740

L A

D I S M E,

Enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

Premierement descripte en Flameng, et maintenant convertie en François, par SIMON STEVIN *de Bruges.*

Décidons d'écrire $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{5}{1\,000}$

de la façon suivante : $3^{①}$ $7^{②}$ $5^{③}$

c'est-à-dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces.

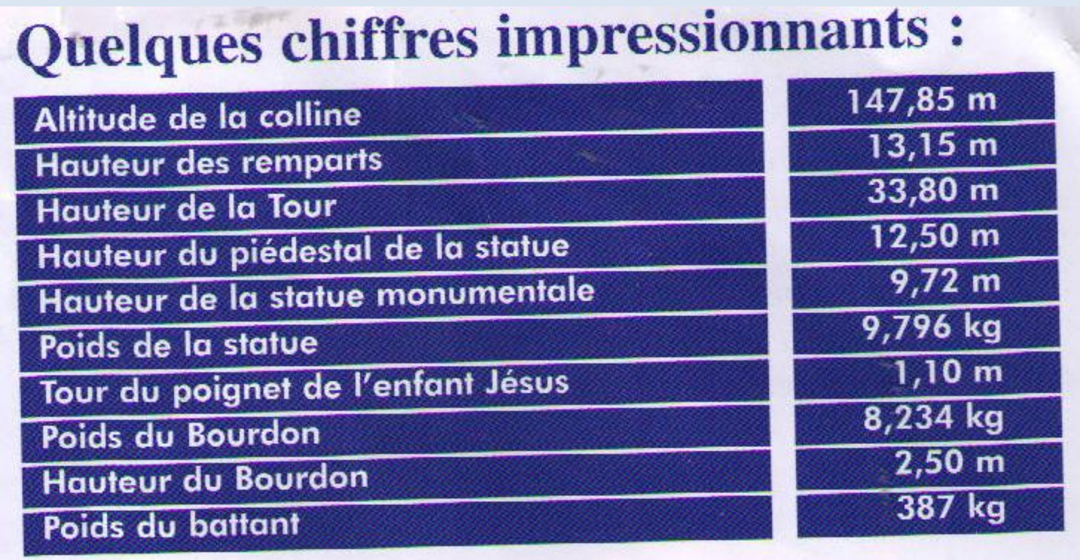
Semblablement $8^{⓪}$ $9^{①}$ $3^{②}$

valent 8 $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{100}$, ensemble $\frac{893}{100}$.

A propos des notations…

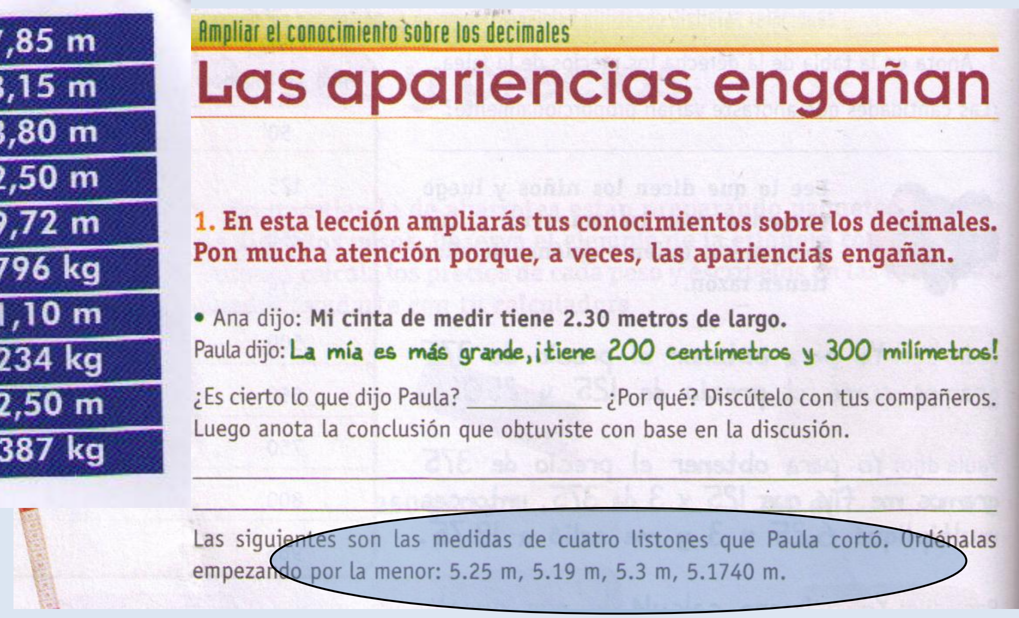
Notre dame de la Garde à Marseille (document 2011)…

Un manuel de mathématiques CM au Mexique (document 2008)



Quelques chiffres impressionnants :

Altitude de la colline	147,85 m
Hauteur des remparts	13,15 m
Hauteur de la Tour	33,80 m
Hauteur du piédestal de la statue	12,50 m
Hauteur de la statue monumentale	9,72 m
Poids de la statue	9,796 kg
Tour du poignet de l'enfant Jésus	1,10 m
Poids du Bourdon	8,234 kg
Hauteur du Bourdon	2,50 m
Poids du battant	387 kg



Ampliar el conocimiento sobre los decimales

Las apariencias engañan

1. En esta lección ampliarás tus conocimientos sobre los decimales. Pon mucha atención porque, a veces, las apariencias engañan.

• Ana dijo: **Mi cinta de medir tiene 2.30 metros de largo.**

Paula dijo: **La mía es más grande, ¡tiene 200 centímetros y 300 milímetros!**

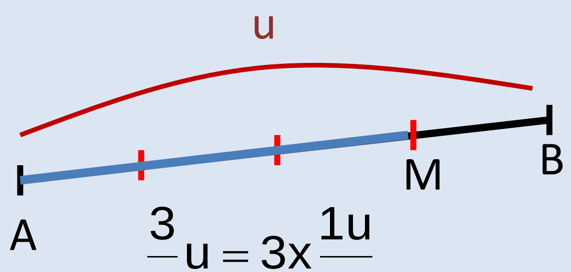
¿Es cierto lo que dijo Paula? __________ ¿Por qué? Discútelo con tus compañeros. Luego anota la conclusión que obtuviste con base en la discusión.

Las siguientes son las medidas de cuatro listones que Paula cortó. Ordénalas empezando por la menor: 5.25 m, 5.19 m, 5.3 m, 5.1740 m.

1-6 les fractions

Joël Briand 30 janvier 2019

Deux conceptions des fractions

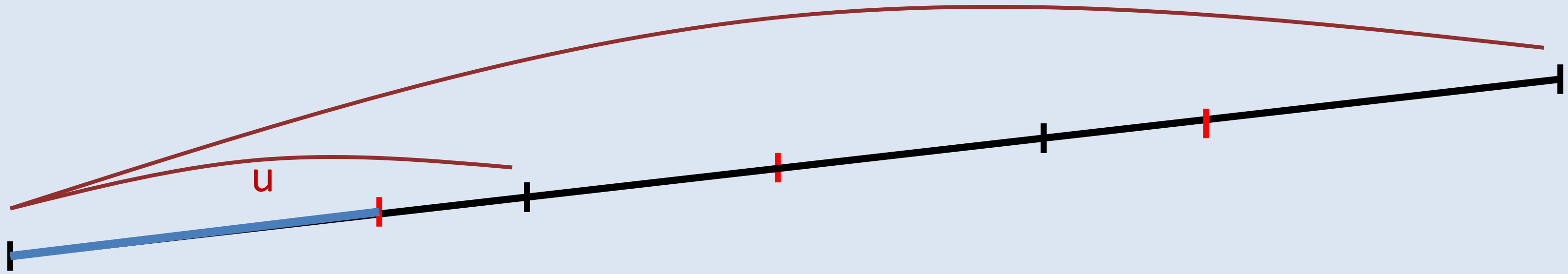


$$\frac{3}{4}u = 3x\frac{1u}{4}$$

-« 3 quarts » renvoie au partage du segment unité (de mesure 1) qui est fractionné en 4 parts égales (par pliage) et l'on prend 3 de ces quarts. Dans ce cas, on parle de « fractionnement de l'unité ».

$$\frac{3}{4}\text{u est la mesure du segment [AM]}$$

Autre conception



$$\frac{3}{4}u = \frac{3u}{4}$$

-« 3 divisé par 4 » renvoie au partage d'un segment de mesure 3u en 4 segments de mesures égales (cela peut être un segment de mesure 3u, mais cela peut être aussi 3 pizzas, etc.). On parle alors de « commensuration ».

C'est cette seconde conception qui donne du sens à la « fraction quotient ».
« Pour faire 3 u il faut 4 u'» ; « 4 x = 3 »
Les programmes 2016 renvoient à la 6° cette conception des fractions.

Partie 2

Les objectifs à atteindre

• Prendre conscience de l'insuffisance des entiers pour résoudre certains problèmes sur les grandeurs

• Envisager de nouveaux nombres pour résoudre ces problèmes

• Faire le lien entre ces nombres et les entiers

• Prolonger à ces nombres l'ordre des entiers

• Concevoir qu'entre ces nouveaux nombres, on peut toujours en intercaler un autre, ce qui est décisif pour la mesure

• Prolonger à ces nouveaux nombres les opérations

• Utiliser ces nouveaux nombres dans des situations d'approximation dans le cadre de la mesure des grandeurs

• Utiliser ces nouveaux nombres dans des problèmes variés.

Des points d’appui

- La construction de fractions simples et surtout de fractions décimales est justifiée par le fait qu’elles sont utiles à une compréhension correcte des nombres décimaux

$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12{,}54$$

- Pour les fractions décimales, le passage à l’écriture à virgule est une simple convention
- Ce sont les fractions décimales qui permettent de travailler la signification des chiffres qui composent la partie décimale d’un décimal

Proposition pour une progression à l'école

Nos choix

• Les fractions et les décimaux doivent apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les entiers ne permettaient pas de résoudre :

- Problèmes de partage

- Problèmes de mesures de longueur et d'aire

-Problèmes de repérage d'un point sur une droite.

-On ne demande pas une grande expertise des fractions en général : elles sont un point de passage. Le fractionnement de l'unité suffit.

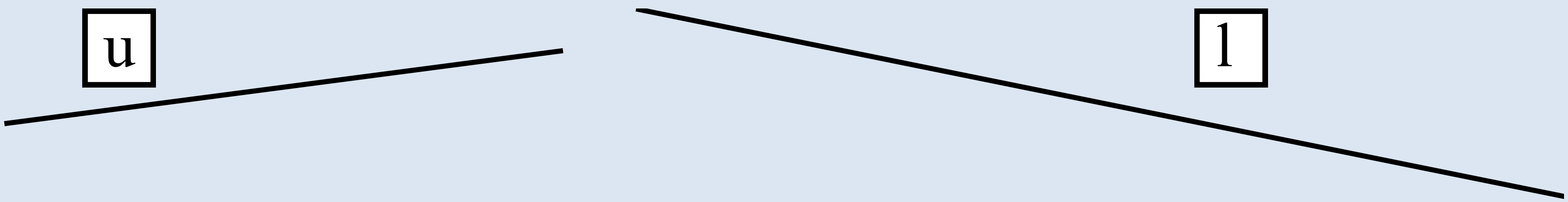
Premier bloc d'étapes
(en période 4 du CM1)

1 : les fractions au quotidien

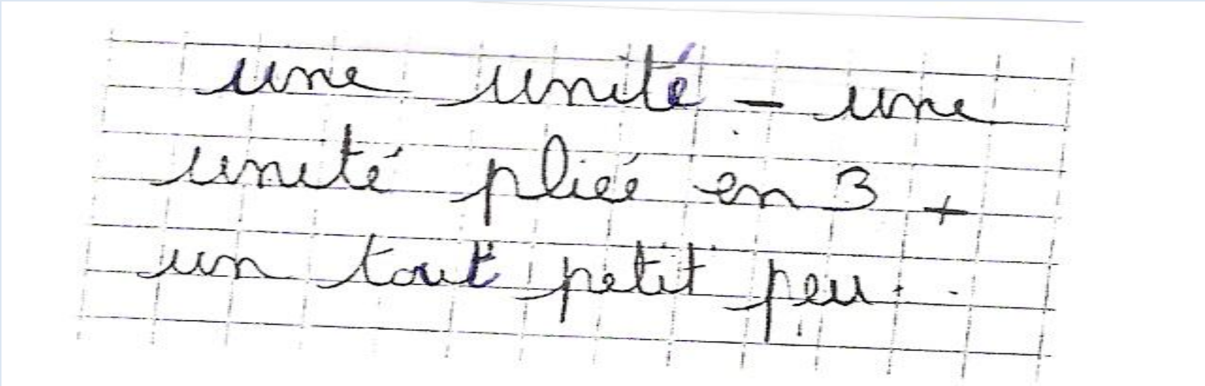
Evocation de situations quotidiennes dans lesquelles les fractions sont utilisées, plutôt que s'appuyer sur des pratiques telles que 3,25 pour 3 euros 25 centimes. (Obstacle).

Partage de bandes par pliage : les limites…

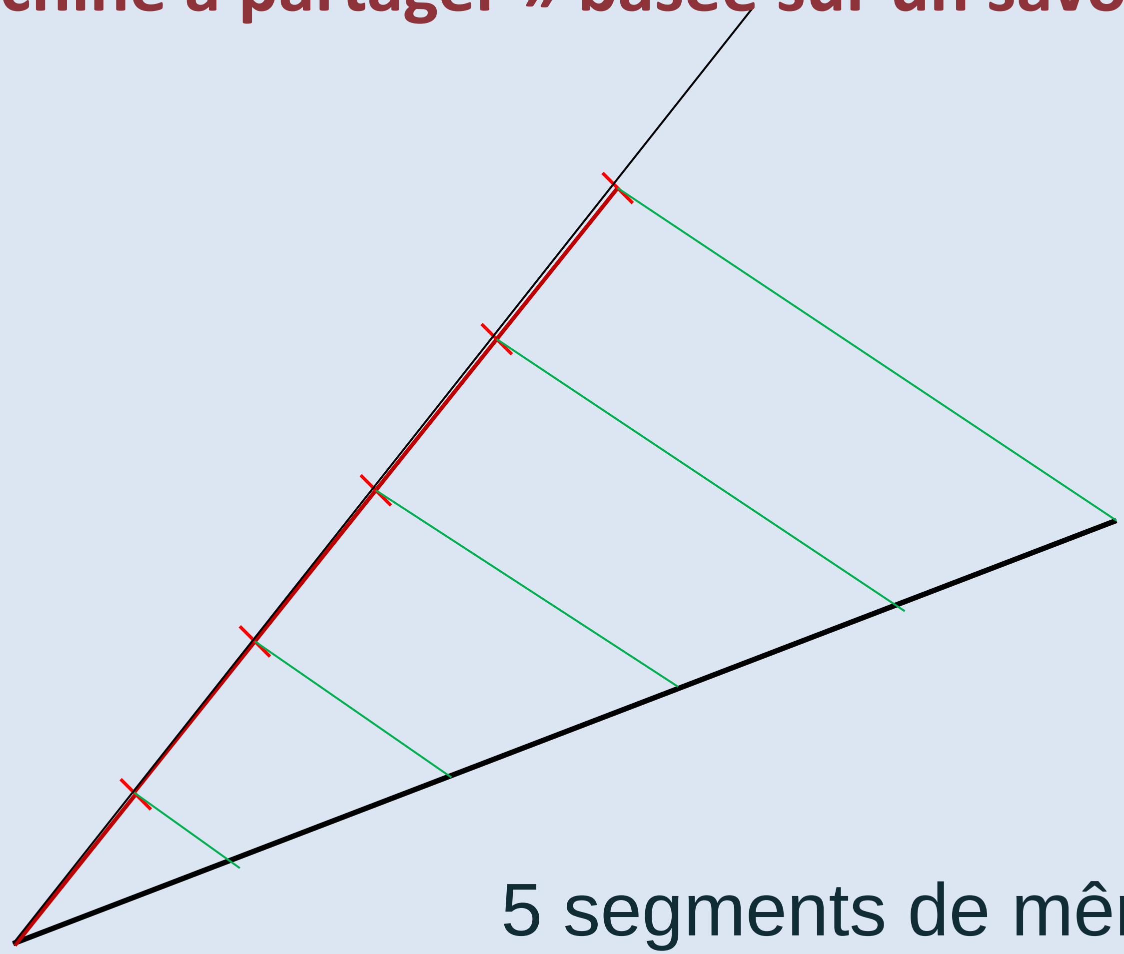
2 : Situation de communication



But : permettre de palier l'insuffisance des nombres entiers pour mesurer une longueur.
Situation : tracer un segment de même longueur qu'un segment donné à partir d'un message. Emetteur et récepteur ont le segment unité.
Cette situation permet la production de messages du type : *« Le segment mesure une unité plus la moitié de l'unité »* ou bien *« c'est u + 1/2 de u ».*

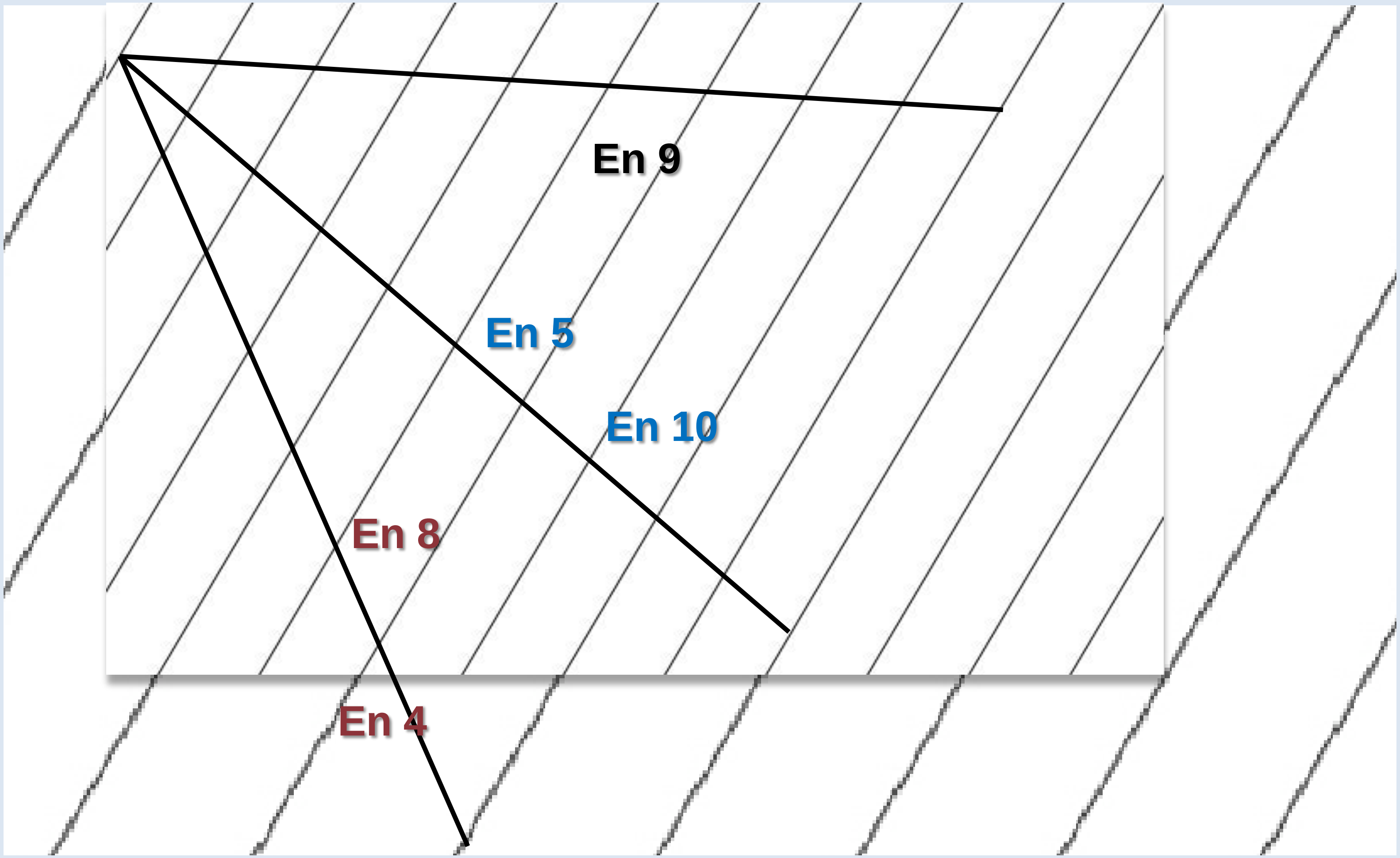


3 : « machine à partager » basée sur un savoir faire ancien…

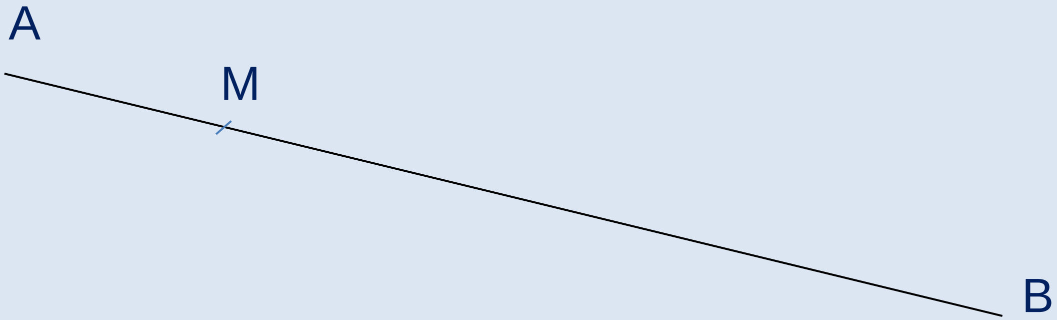


5 segments de même mesure

Environnement de fractions plus riche, avec, notamment les fractions décimales



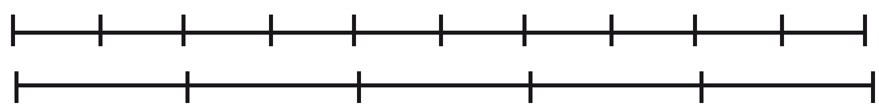
Repérer précisément un point sur un segment unité



4 : positionner une fraction sur la droite graduée

a. Donne la position des points G, H, I et J sur la droite.

b. Sur cette droite place les fractions : $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{15}{10}$ $\frac{7}{10}$



3 désigne la position du point B sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AB.

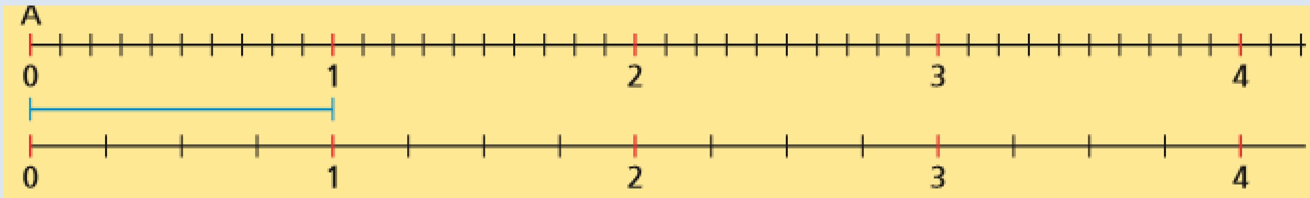
$\frac{7}{10}$ désigne la position du point C sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AC.

5 : utiliser les fractions pour résoudre des problèmes d'aires

Les fractions permettent aussi d'exprimer la mesure de l'aire de figures planes dès lors que l'on a choisi une aire unité.

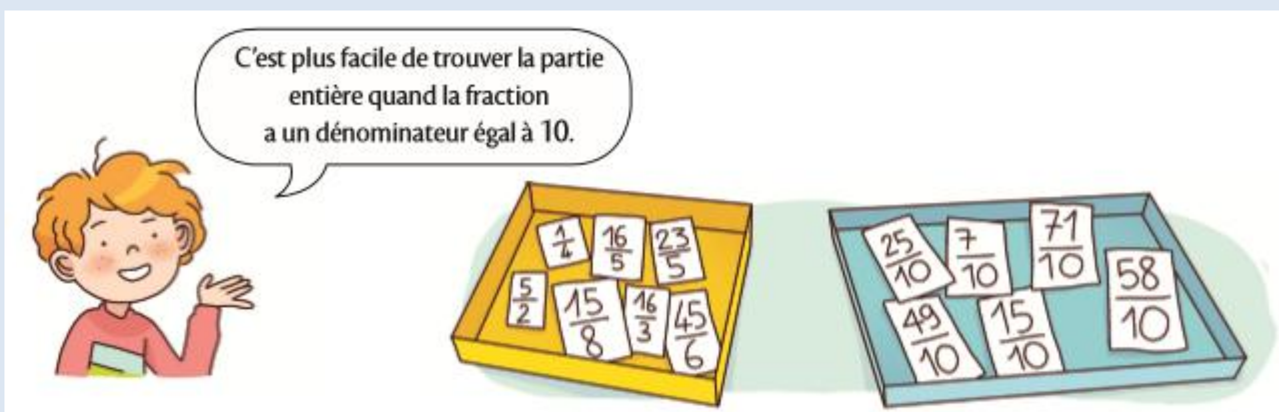
6 : les fractions décimales : leur avantage

Placer des fractions à l’aide de la graduation la mieux adaptée puis écrire la fraction sous la forme d’un entier et d’un « rompu »



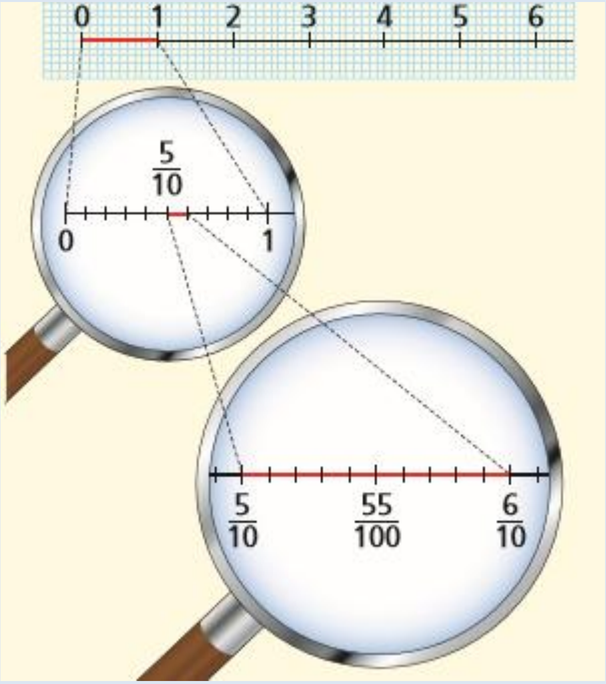
$\frac{3}{4}$ $\frac{22}{7}$ $\frac{32}{10}$ $\frac{45}{10}$ $\frac{17}{5}$ $\frac{21}{10}$

Lesquelles sont faciles à localiser à l’aide de leur écriture ?



7 : les fractions décimales : différentes écritures

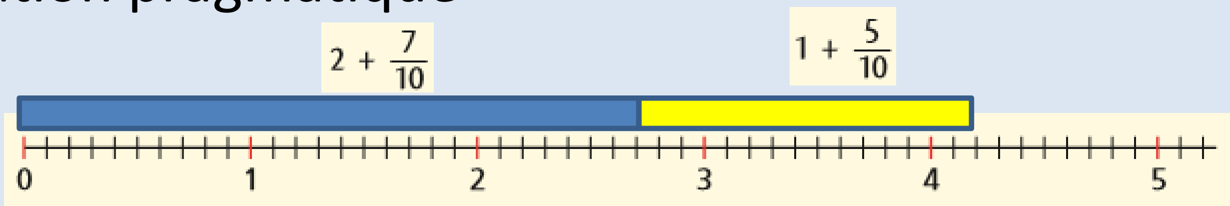
Enrichir la graduation : les centièmes



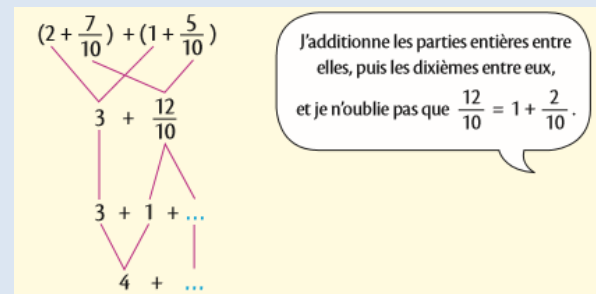
S’approprier différentes écritures

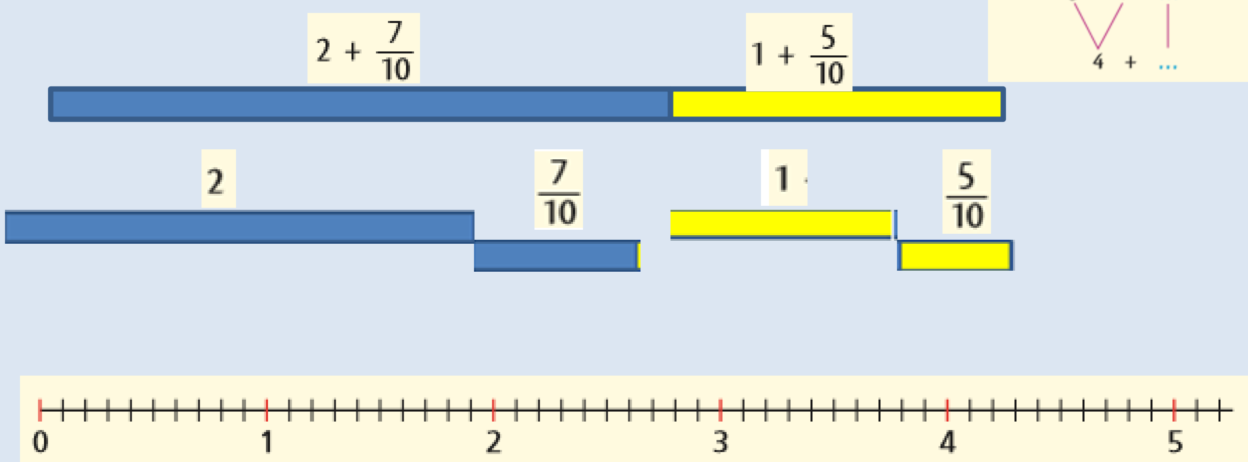
8 : les fractions décimales : les additionner

Validation pragmatique



Validation syntaxique avec retour au pragmatique

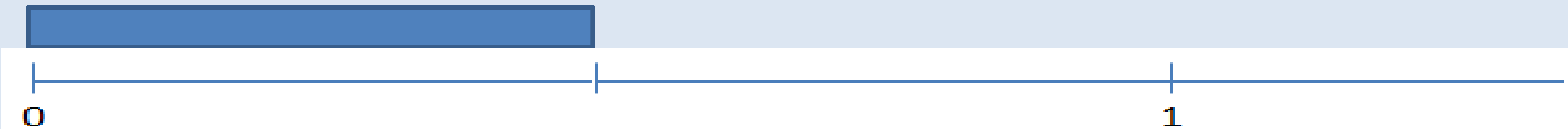




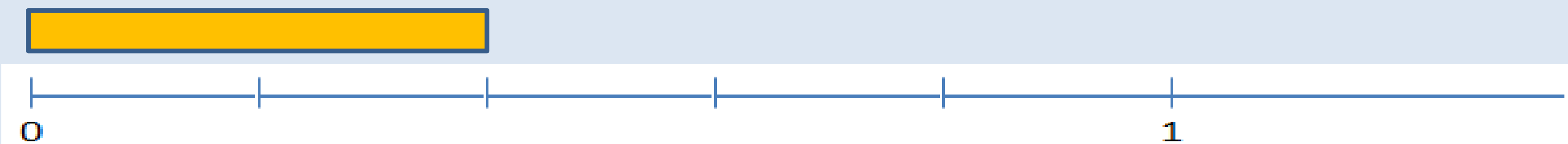
Travail effectué en classe de 6°

But : réfuter le modèle : $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$

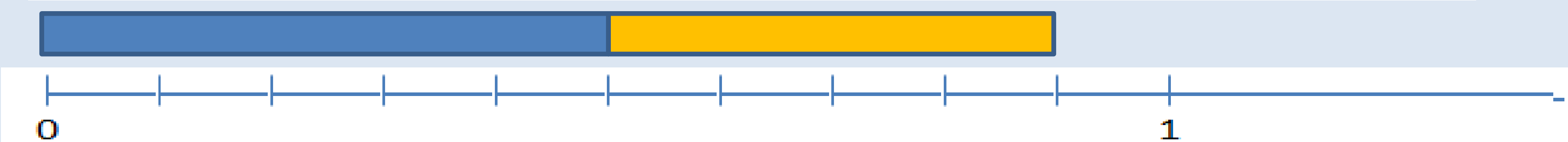
La bande bleue a été mesurée à l'aide de la graduation réalisée en demi $\frac{1}{2}$



La bande jaune a été mesurée à l'aide de la graduation réalisée en cinquièmes : $\frac{2}{5}$



Question : « prévoyez par le calcul la mesure de la bande obtenue en mettant bout à bout».
Une fois les prévisions effectuées, vérification à l'aide du matériel



Second bloc d’étapes
(en période 5 du CM1)

Le second bloc d'étape consiste en le passage conventionnel à l'écriture à virgule.

9 : les nombres décimaux : écritures à virgule (Stevin)

Convention d'écriture.

$$12 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} = 12{,}54$$

10 : Les additionner

La situation

La reprise sur le manuel

Deux méthodes de calcul

$1{,}45 + 2{,}7 = (1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}) + (2 + \frac{7}{10}) = \ldots$

$$\begin{array}{r} 1{,}45 \\ +\ \ 2{,}7 \\ \hline \end{array}$$

11 : les comparer

La situation : le travail sur la droite numérique révèle des difficultés et des connaissances erronées

Jeu de l'explorateur : ici le nombre caché est 0,111.

0,1 et 0,2 sont déjà placés. Les élèves savent que le nombre caché est entre 0,1 et 0,2.

La question est « est-il entre 0,15 et 0,20 ? ». La réponse est « non ».

Un enfant vient placer ces nombres au tableau.

12 : Les soustraire

L'évocation de la situation sur la manuel

La consolidation de la soustraction à la russe *(voir plus tard si le temps le permet)*

$$\begin{array}{ccc} & 2{,}34 - 1{,}6 & \\ +0{,}4 & & +0{,}4 \\ & 2{,}74 - 2 & \end{array}$$

$2{,}34 - 1{,}6 = \dots$

Le rappel du traitement de la soustraction par conservation des écarts

$$\begin{array}{rrrr} & 2, & {}^{10+}3 & 4 \\ - & {}^{1+}1, & 6 & \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

En CM2 :
le cas du produit d'un décimal par un entier, tout va bien!

a. Théo

$$\begin{array}{r} 2{,}35 \\ +\ 2{,}35 \\ +\ 2{,}35 \\ +\ 2{,}35 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

b. Qwang

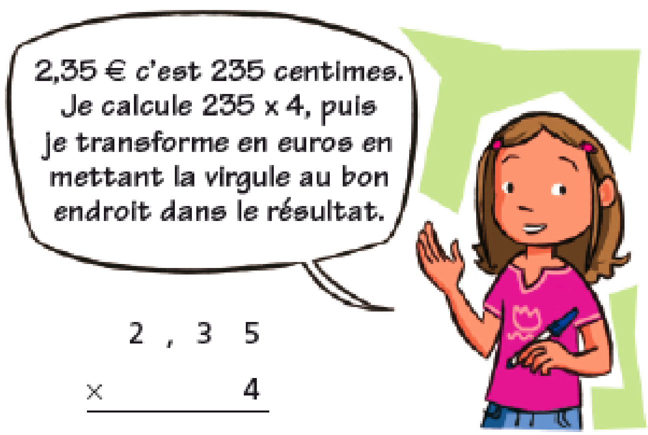
	2	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{100}$
4	$4 \times 2 = \ldots$	$4 \times \frac{3}{10} = \ldots$	$4 \times \frac{5}{100} = \ldots$

$2{,}35 \times 4 = \ldots$

c. Leïla propose alors la multiplication en colonne, pas à pas.

$$\begin{array}{rl} 2{,}35 & \\ \times\ \ \ \ 4 & \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots & \longleftarrow 4 \times 0{,}05 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \longleftarrow 4 \times 0{,}3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \longleftarrow 4 \times 2 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots & \longleftarrow 2{,}35 \times 4 \end{array}$$

d. Alice



$$\begin{array}{r} 2{,}35 \\ \times\ \ \ \ 4 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Conclusion

- L'enseignement des nombres décimaux à l'école suppose plus qu'ailleurs en mathématiques une formation de qualité auprès des futurs professeurs des écoles.

- Les tutoriels sur le WEB sont à prendre avec précaution.

- La droite graduée n'est pas encore suffisamment prise comme objet d'étude. La compréhension de la double signification des nombres sur cette droite est nécessaire pour la compréhension des fractions et de l'addition de celles-ci.

- Il serait gratifiant de faire comprendre que le système métrique permet d'opérer sur les mesures en se servant des opérations dans les nombres, sans conversions fastidieuses.

Quelques conseils

Travaillez la consigne

Installez les élèves dans la durée des apprentissages (chantiers, micro-séquences pour le groupe).

Réfléchissez à l'individualisation des parcours en maintenant une même tâche. Pour cela,

- Jouer sur les variables de commandes de la situation
- Jouer sur les procédés de calculs *(algorithmes évolutifs)*

Soyez attentifs aux difficultés non spécifiques aux mathématiques : *(lecture, représentations spatiales, cultures différentes).*

Les programmes 2016 nous y incitent. Il sont seuls force de loi.

Enfin, le suivi d'un manuel sans jamais de mises en scène en classe installe les élèves dans une relation défaillante aux mathématiques

Merci de m'avoir écouté et…

Bon courage pour la suite.